

Nr. 107 – 1990

Approximation mit verallgemeinerten Splines

von

Klaus Freyburger

Approximation mit verallgemeinerten Splines

Klaus Freyburger
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim

§1 Einführung

Polynomiale Splinefunktionen, d.h. differenzierbar zusammengesetzte Polynome, haben sich in der Vergangenheit wegen ihrer hohen Flexibilität und einfachen Berechenbarkeit als günstig bei der effizienten Approximation selbst von nicht-glatten Funktionen erwiesen. In polynomialen Splineräumen gilt der bekannte Satz von Schoenberg & Whitney, der aussagt, daß eine Menge von Punkten genau dann eindeutige Lagrange-Interpolation zuläßt, wenn diese Punkte eine gewisse Lage zu den Knoten besitzen. Dieser Satz ist von fundamentaler Bedeutung in der Theorie der Approximation mit polynomialen Splines.

Wir untersuchen hier verallgemeinerte Splineräume, die unter anderem dadurch gekennzeichnet sind, daß die Polynomräume durch tschebyscheffsche Räume ersetzt werden und diese nicht mehr für alle Knotenintervalle identisch sein müssen. Sie können insbesondere unterschiedliche Dimensionen besitzen. Ferner werden die Differenzierbarkeitsbedingungen an den Knoten mit Hilfe linearer Funktionale verallgemeinert und zunächst auch Verknüpfungen zwischen nicht-benachbarten Knotenintervallen zugelassen.

In Nürnberger, Schumaker, Sommer & Strauß [7] werden die verallgemeinerten Splineräume charakterisiert, in denen eine dem oben angeführten Satz von Schoenberg & Whitney entsprechende Aussage gilt. Gleichmäßig beste Approximationen mit solchen Splineräumen wurden in [9] behandelt.

Unser Ziel in dieser Arbeit ist es, diese Untersuchungen fortzuführen, wobei wir wie folgt vorgehen. In §2 geben wir die grundlegenden Definitionen und Resultate aus [7] und [9] sowie einige elementare Folgerungen aus Wagner [13] an. §3 beinhaltet unter anderem einen neuen Beweis der Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen aus [9]. Eindeutig beste Approximationen können selbst im polynomialen Fall nicht allein mit

Hilfe von alternierenden Extremalpunkten charakterisiert werden, wie in Nürnberger & Singer [10], Satz 2.4 gezeigt wird. Wir zeigen, daß auch für verallgemeinerte Splineräume eine Charakterisierung mit Hilfe eines Flachheitsbegriffes möglich ist.

In §4 untersuchen wir verallgemeinerte tschebyscheffsche Splineräume, die in [8] eingeführt wurden. Da die Theorie aus [7] nicht direkt anwendbar ist, führen wir zunächst Untersuchungen über Interpolation in solchen Räumen und über die Dimension von gewissen Teilräumen durch. Das Hauptresultat dieses Abschnitts besagt, daß für eine stetige Funktion f die Menge, auf der alle besten Approximationen von f übereinstimmen, die Vereinigung von Knotenintervallen ist.

§2 Grundlagen

In diesem Abschnitt definieren wir die hier relevanten Splineräume und wiederholen die für uns wesentlichen Resultate aus Nürnberger, Schumaker, Sommer & Strauß [7] und [9]. Anschließend geben wir einen kurzen Beweis zweier Folgerungen aus Wagner [13] an, und zwar einer Dimensionsformel sowie der Beobachtung, daß bei den hier relevanten Räumen nur Beziehungen zwischen benachbarten Knotenintervallen möglich sind. Wir definieren nun die Räume, die für uns von Interesse sind.

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$. Dann partitioniert $\Delta := \{x_i\}_{i=1}^k$ das Intervall $[a, b]$ in $k+1$ Teilintervalle $I_i := [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \dots, k-1$ und $I_k := [x_k, x_{k+1}]$. Für jedes $i = 0, \dots, k$ sei $\mathcal{U}_i := \text{span}\{u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}\} \subseteq C(I_i)$ ein tschebyscheffscher Raum. Schließlich seien

$$\Gamma_{i,j} := \{(\underline{\gamma}_{\nu}^{i,j}, \overline{\gamma}_{\nu}^{i,j})\}_{\nu=1}^{r_{i,j}} \quad (2.1)$$

und

$$\Gamma := \{\Gamma_{i,j}; 0 \leq i < j \leq k\}, \quad (2.2)$$

wobei $\underline{\gamma}_{\nu}^{i,j}$ bzw. $\overline{\gamma}_{\nu}^{i,j}$ lineare Funktionale auf \mathcal{U}_i bzw. \mathcal{U}_j sind. Wir definieren nun verallgemeinerte Splineräume.

Definition 2.1 Seien $\Delta, \mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k$ und Γ wie oben.

(i) Γ heißt *zulässig*, falls für alle $j = 1, \dots, k$ die Matrix

$$A_j^+ := \begin{pmatrix} A_{0,j}^+ \\ \vdots \\ A_{j-1,j}^+ \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{i,j}^+ := \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1^{i,j} u_{j,1} & \dots & \bar{\gamma}_1^{i,j} u_{j,n_j} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\gamma}_{r_{i,j}}^{i,j} u_{j,1} & \dots & \bar{\gamma}_{r_{i,j}}^{i,j} u_{j,n_j} \end{pmatrix}$$

Rang $r_j := r_{0,j} + \dots + r_{j-1,j}$ besitzt und für alle $j = 0, \dots, k-1$ die Matrix

$$A_j^- := \begin{pmatrix} A_{j,k}^- \\ \vdots \\ A_{j,j+1}^- \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{j,p}^- := \begin{pmatrix} \underline{\gamma}_1^{j,p} u_{j,1} & \dots & \underline{\gamma}_1^{j,p} u_{j,n_j} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{\gamma}_{r_{j,p}}^{j,p} u_{j,1} & \dots & \underline{\gamma}_{r_{j,p}}^{j,p} u_{j,n_j} \end{pmatrix}$$

Rang $\tilde{r}_j := r_{j,k} + \dots + r_{j,j+1}$ besitzt.

(ii) Die Menge

$$S(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Gamma; \Delta) := \{s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; s_i := s|_{I_i} \in \mathcal{U}_i, i = 0, \dots, k \text{ und}$$

$$\underline{\gamma}_\nu^{i,j} s_i = \bar{\gamma}_\nu^{i,j} s_j, \nu = 1, \dots, r_{i,j} \text{ für alle } 0 \leq i < j \leq k\}$$

heißt *verallgemeinerter Splinerraum*, falls Γ zulässig ist und $S(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Gamma; \Delta) \subseteq C[a, b]$ gilt.

Die Paare linearer Funktionale in $\Gamma_{i,j}$ geben also an, wie das i -te Teilstück des Splines mit dem j -ten Teilstück verknüpft ist. Durch die Zulässigkeit von Γ ist gewährleistet, daß die linearen Funktionale in gewisser Weise unabhängig voneinander sind. Diese Unabhängigkeit ist zur Bestimmung der Dimension von verallgemeinerten Splineräumen notwendig.

Die Zahl r_j gibt die Anzahl der Bedingungen an, mit denen der Spline im j -ten Intervall mit allen vorhergehenden Intervallen verknüpft ist, und analog beschreibt \tilde{r}_j die Anzahl der Verknüpfungen zu allen folgenden Intervallen. Schließlich merken wir noch an, daß gemäß Definition 2.1 in einem verallgemeinerten Splinerraum insbesondere $r_j \leq n_j$ und $\tilde{r}_j \leq n_j$ gelten.

Ist S ein verallgemeinerter Splinerraum, so setzen wir für alle $0 \leq i < j \leq k+1$

$$S_{i,j} := S|_{[x_i, x_j]}, \quad (2.3)$$

$$S_{i,j}^0 := \{s \in S; s(x) = 0 \text{ für alle } x \in [x_i, x_j]\} \quad (2.4)$$

und

$$n_{i,j} := \dim \mathcal{S}|_{[x_i, x_j]}, \quad (2.5)$$

$$n_{i,j}^0 := \dim \mathcal{S}_{i,j}^0. \quad (2.6)$$

Da verallgemeinerte Splineräume nur aus stetigen Funktionen bestehen, gilt in solchen Räumen

$$n_{i,j} = \dim \mathcal{S}_{i,j}. \quad (2.7)$$

(Wir haben $n_{i,j}$ dennoch wie in (2.5) definiert, da wir diese Definition auch für die unter Umständen nicht nur aus stetigen Funktionen bestehenden Räume aus §4 verwenden werden.) Schließlich seien

$$m_\nu := n_\nu - r_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \dots, k \quad (2.8)$$

und

$$\tilde{m}_\nu := n_\nu - \tilde{r}_\nu \quad \text{für } \nu = 0, \dots, k-1. \quad (2.9)$$

Die nun folgenden Dimensionsformeln wurden in [7] gezeigt.

Lemma 2.2 *In einem verallgemeinerten Spliner Raum \mathcal{S} gelten:*

$$\dim \mathcal{S} = n_0 + m_1 + \dots + m_k = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{k-1} + n_k, \quad (2.10)$$

$$n_{0,i} = n_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} \quad \text{für alle } 0 < i < k+1, \quad (2.11)$$

$$n_{j,k+1} = \tilde{m}_j + \dots + \tilde{m}_{k-1} + n_k \quad \text{für alle } 0 < j < k+1, \quad (2.12)$$

$$n_{0,i}^0 = m_i + \dots + m_k \quad \text{für alle } 0 < i < k+1, \quad (2.13)$$

$$n_{j,k+1}^0 = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} \quad \text{für alle } 0 < j < k+1. \quad (2.14)$$

Interpolation ist eine Standardmethode, um eine gegebene Funktion $f \in C[a, b]$ durch Funktionen einfacherer Struktur zu approximieren. Wir definieren das folgende Interpolationsproblem.

Definition 2.3 Seien ein n -dimensionaler Teilraum G von $C[a, b]$, Punkte $t_1 < \dots < t_n$ aus $[a, b]$ und reelle Zahlen z_1, \dots, z_n gegeben. Das *Lagrange-Interpolationsproblem* besteht darin, eine Funktion $g \in G$ zu finden mit

$$g(t_i) = z_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Sei g_1, \dots, g_n eine beliebige Basis von G . Nach einem bekannten Resultat aus der linearen Algebra hat das Lagrange-Interpolationsproblem genau dann für beliebige Werte z_1, \dots, z_n eine Lösung, wenn

$$D \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} := \det(g_j(t_i))_{i,j=1}^n \neq 0. \quad (2.16)$$

Da (2.16) unabhängig von der Wahl der Basis ist, ergibt sich die folgende Definition.

Definition 2.4 Sei g_1, \dots, g_n Basis eines n -dimensionalen Teilraumes G von $C[a, b]$. Eine Menge von Punkten $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ heißt *poised bzgl. G* , falls (2.16) gilt.

Das folgende Lemma aus [7] gibt eine Bedingung an, die in verallgemeinerten Splineräumen notwendig für eine poised Menge ist.

Lemma 2.5 Seien S ein verallgemeinerter Spliner Raum der Dimension n und $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ eine poised Menge. Dann gilt die Interlacing Condition

$$t_{n-n_{i,k+1}} < x_i < t_{n_{0,i}+1} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k. \quad (2.17)$$

Wie in [9] schreiben wir $N_I(T)$ für die Anzahl der Punkte einer Menge $T \subseteq [a, b]$, die in einem Intervall $I \subseteq [a, b]$ liegen. Hieraus erhalten wir:

Lemma 2.6 Eine Menge von Punkten $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ mit $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ genügt genau dann der Interlacing Condition (2.17), wenn

$$N_{[x_0, x_i]}(T) \leq n_{0,i} \quad \text{und} \quad N_{[x_i, x_{k+1}]}(T) \leq n_{i,k+1} \quad (2.18)$$

für alle $i = 1, \dots, k$ gelten.

Beweis: Der Beweis ist klar. \diamond

Wie einfache Beispiele aus [7] zeigen, ist die Interlacing Condition (2.17) in verallgemeinerten Splineräumen im allgemeinen nicht hinreichend für eine poised Menge. Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

Definition 2.7 Ein n -dimensionaler verallgemeinerter Splineraum \mathcal{S} besitzt die *Interlacing Property*, falls eine Menge $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ genau dann poised ist, wenn die Interlacing Condition (2.17) gilt. In diesem Fall heißt \mathcal{S} auch *IP-Raum*.

Die folgende Charakterisierung der IP-Räume wurde in [7] bewiesen.

Satz 2.8 Für einen verallgemeinerten Splineraum \mathcal{S} sind äquivalent:

(i) \mathcal{S} ist IP-Raum.

(ii) Es gelten die folgenden drei Bedingungen:

$$\mathcal{S} \text{ ist schwach tschebyscheff,} \quad (2.19)$$

$$|\text{bd } Z(s)| \leq n_{i,j}^0 \quad \text{für alle } s \in \mathcal{S}_{i,j}^0, \quad 0 \leq i < j \leq k+1, \quad (2.20)$$

$$\dim(\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0) = \max\{n - n_{0,i} - n_{j,k+1}, 0\}, \quad 1 \leq i < j \leq k. \quad (2.21)$$

Hierbei setzen wir für $s \in \mathcal{S}$

$$Z(s) := \{x \in [a, b]; s(x) = 0\},$$

$$\text{bd } Z(s) := \text{Rand von } Z(s) \text{ in } [a, b],$$

$$|\text{bd } Z(s)| := \text{Kardinalität von } \text{bd } Z(s).$$

Die folgenden beiden Resultate aus [7] und [9] enthalten eine Aussage über die Struktur und die Dimension von gewissen Teilräumen eines IP-Raumes.

Lemma 2.9 In einem IP-Raum \mathcal{S} gelten:

$$\mathcal{S}_{i,j}^0 \text{ ist schwach tschebyscheff,} \quad 0 \leq i < j \leq k+1, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0 \text{ ist schwach tschebyscheff,} \quad 1 \leq i < j \leq k. \quad (2.23)$$

Weiterhin gelten für alle $0 \leq i < j \leq k+1$ die Dimensionsformeln

$$n_{i,k+1} = n_{i,j} + m_j + \dots + m_k, \quad (2.24)$$

$$n_{0,j} = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{i-1} + n_{i,j}. \quad (2.25)$$

Satz 2.10 Sei \mathcal{S} ein IP-Raum. Dann ist für alle $0 \leq i < j \leq k+1$ auch $\mathcal{S}_{i,j}$ ein IP-Raum.

Wir zeigen nun ein elementares Lemma.

Lemma 2.11 Sind ein verallgemeinerter Splineraum \mathcal{S} und ein Knotenintervall $[x_i, x_{i+1}]$ gegeben, so existiert zu jedem $u_i \in \mathcal{U}_i$ ein $s \in \mathcal{S}$ mit

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} = u_i.$$

Weiterhin gelten die Dimensionsformeln

$$n_{i,i+1} = n_i \quad (2.26)$$

und

$$n = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{i-1} + n_i + m_{i+1} + \dots + m_k. \quad (2.27)$$

Beweis: Wie in Schumaker [12], Lemma 11.5 erweitert man u_i zunächst sukzessive zu einem Element aus $\mathcal{S}_{i,k+1}$ und anschließend zu einem verallgemeinerten Spline $s \in \mathcal{S}$. Hieraus folgt sofort (2.26), und (2.27) beweist man analog zu [12], Satz 11.4. \diamond

Wir können nun zwei Dimensionsformeln aus Wagner [13] beweisen.

Lemma 2.12 In einem IP-Raum gelten für $0 \leq i < j \leq k+1$ die Dimensionsformeln

$$n_{i,j} = n_i + m_{i+1} + \dots + m_{j-1} \quad (2.28)$$

und

$$n_{i,j} = \tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-2} + n_{j-1}. \quad (2.29)$$

Beweis: Wegen (2.24) und (2.26) folgen

$$n_{i,k+1} = n_{i,i+1} + m_{i+1} + \dots + m_k = n_i + m_{i+1} + \dots + m_k$$

und

$$n_{i,k+1} = n_{i,j} + m_j + \dots + m_k,$$

also (2.28). (2.29) beweist man analog unter Benutzung von (2.25). \diamond

Das nun folgende Korollar aus [13] sagt aus, daß wir uns bei IP-Räumen auf Räume mit Beziehungen nur zwischen benachbarten Knotenintervallen beschränken können. (Es steht nicht im Widerspruch zu [7], Beispiel 6.1, da die dem dort betrachteten Splineraum \mathcal{S} zugehörige Menge Γ nicht zulässig im Sinne von Definition 2.1 ist, also \mathcal{S} kein verallgemeinerter Splineraum ist.)

Korollar 2.13 In einem IP-Raum \mathcal{S} gilt

$$r_j = r_{j-1,j} = \tilde{r}_{j-1} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, k.$$

Beweis: Offenbar (vgl. Lemma 2.11) gilt

$$n_{j-1,j+1} = n_{j-1} + n_j - r_{j-1,j},$$

und aus (2.28) erhalten wir

$$n_{j-1,j+1} = n_{j-1} + n_j - r_j,$$

d.h.

$$r_j = r_{j-1,j}.$$

Die andere Gleichung folgt analog unter Benutzung von (2.29). \diamond

§3 Eindeutigkeit bester Approximationen

Ist $f \in C[a,b]$ gegeben, so existiert zu jedem IP-Raum \mathcal{S} eine *beste Approximation* $s \in \mathcal{S}$ von f , d.h.

$$\|f - s\| \leq \|f - g\| \quad (3.1)$$

für alle $g \in \mathcal{S}$, wobei mit $\|\cdot\|$ die Supremum-Norm bezeichnet wird. Wir sagen, daß $s_f \in \mathcal{S}$ *stark eindeutig beste Approximation von f aus \mathcal{S}* ist, falls es eine Konstante $K_f > 0$ gibt mit

$$\|f - g\| \geq \|f - s_f\| + K_f \|g - s_f\| \quad \text{für alle } g \in \mathcal{S}. \quad (3.2)$$

Nürnberg, Schumaker, Sommer & Strauß [9] zeigten eine Charakterisierung bester Approximationen und eine Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen aus IP-Räumen. Wir wiederholen hier das erste Ergebnis und geben anschließend einen Beweis des zweiten Resultats ohne Benutzung von Nürnberg [5], Satz 1.4. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff der alternierenden Extremalpunkte.

Definition 3.1 Seien $h \in C[a, b]$ und $T \subseteq [a, b]$.

- (i) Beliebige Punkte $t_1 < \dots < t_p$ aus T heißen *alternierende Extrempunkte* (kurz: *A-Punkte*) von h , falls es ein $\sigma \in \{-1, 1\}$ gibt mit

$$\sigma(-1)^i h(t_i) = \|h\| \quad \text{für } i = 1, \dots, p. \quad (3.3)$$

Die maximale Anzahl von A-Punkten von h in T bezeichnen wir mit $A(h)|_T$.

- (ii) Beliebige Punkte $t_1 < \dots < t_p$ aus T heißen *schwach alternierend bzgl. h* , falls es ein $\sigma \in \{-1, 1\}$ gibt mit

$$\sigma(-1)^i h(t_i) \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, p. \quad (3.4)$$

Die maximale Anzahl von bzgl. h schwach alternierenden Punkten aus T bezeichnen wir mit $SA(h)|_T$.

Wir formulieren nun die Charakterisierung bester Approximationen aus [9]. Die Zählung der A-Punkte nach Definition 3.1 unterscheidet sich von der Zählung aus [9].

Satz 3.2 Seien S ein IP-Raum, $f \in C[a, b] \setminus S$ und $s \in S$. Dann sind äquivalent:

- (i) s ist beste Approximation von f aus S .
(ii) Es gibt $0 \leq i < j \leq k+1$ mit

$$A(f - s)|_{[x_i, x_j]} \geq n_{i,j} + 1. \quad (3.5)$$

Zum Beweis der Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen benötigen wir die folgenden beiden Resultate (siehe [6], II, Korollar 1.7 und [6], II, Lemma 1.11).

Lemma 3.3 Sei $G \subseteq C[a, b]$ ein n -dimensionaler schwach tschebyscheffscher Raum. Für alle Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ mit $1 \leq m \leq n$ existiert eine nicht-triviale Funktion $g \in G$ mit

$$(-1)^i g(t) \geq 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Lemma 3.4 Seien G ein n -dimensionaler schwach tschebyscheffscher Teilraum von $C[a, b]$ und $T = \{t_1, \dots, t_{n+1}\}$ eine Teilmenge von $[a, b]$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt kein nicht-triviales $g \in G$ mit

$$SA(g)|_T = n + 1.$$

- (ii) Für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ist die Menge $T \setminus \{t_i\}$ poised bzgl. G .

Das nächste Resultat zeigt, daß eine gewisse Anzahl von schwach alternierenden Punkten eines Splines s aus einem IP-Raum die Existenz eines "Nullstellenintervalls" von s impliziert.

Lemma 3.5 Seien S ein IP-Raum und $s \in S$.

- (i) Existieren $0 \leq i < j \leq k+1$ mit

$$SA(s)|_{[x_i, x_j]} \geq n_{i,j} + 1,$$

so gibt es ein Intervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$ mit $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$.

- (ii) Gelten $i > 0$, $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i]$ und

$$SA(s)|_{(x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} + 1$$

für ein $i < j \leq k+1$, so existiert ein Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$ mit $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$.

- (iii) Gelten $j < k+1$, $s = 0$ auf $[x_j, x_{j+1}]$ und

$$SA(s)|_{[x_i, x_j)} \geq \tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1$$

für ein $0 \leq i < j$, so existiert ein Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$ mit $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$.

- (iv) Gelten $0 < i < j < k+1$, $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_j, x_{j+1}]$ und

$$SA(s)|_{(x_i, x_j)} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1,$$

so existiert ein Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$ mit $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$.

Beweis: (i): Wir wählen ein Teilintervall $[x_p, x_q]$ von $[x_i, x_j]$ mit

$$SA(s) |_{[x_p, x_q]} \geq n_{p,q} + 1$$

und

$$SA(s) |_{[x_l, x_m]} \leq n_{l,m}$$

für jedes echte Teilintervall $[x_l, x_m] \subseteq [x_p, x_q]$. Damit genügen jeweils $n_{p,q}$ der $n_{p,q} + 1$ schwach alternierenden Punkte der Bedingung (2.18) und sind daher poised, da $S_{p,q}$ nach Satz 2.10 ebenfalls ein IP-Raum ist. Lemma 3.4 ergibt $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$.

(ii): Wir wählen n_{i-1} beliebige Punkte aus $[x_{i-1}, x_i]$ und bezeichnen die Menge dieser Punkte mit T . Dann folgt nach (2.28)

$$SA(s) |_{T \cup (x_i, x_j)} \geq n_{i-1} + m_i + \dots + m_{j-1} + 1 = n_{i-1,j} + 1.$$

Wie in (i) wählen wir ein Teilintervall $[x_v, x_w]$ von $[x_{i-1}, x_j]$ so, daß $[x_v, x_w]$ mindestens $n_{v,w} + 1$ schwach alternierende Punkte aus $T \cup (x_i, x_j]$ und jedes echte Teilintervall $[x_l, x_m] \subseteq [x_v, x_w]$ höchstens $n_{l,m}$ schwach alternierende Punkte aus $T \cup (x_i, x_j]$ enthält, und schließen $s = 0$ auf $[x_v, x_w]$. Da $[x_{i-1}, x_i]$ genau n_{i-1} Punkte aus $T \cup (x_i, x_j]$ enthält, folgt $[x_v, x_w] \neq [x_{i-1}, x_i]$.

(iii) beweist man analog zu (ii).

(iv): Wir wählen n_{i-1} (bzw. n_j) beliebige Punkte aus $[x_{i-1}, x_i]$ (bzw. $[x_j, x_{j+1}]$), und nach (2.28) folgt

$$\begin{aligned} n_{i-1} + n_j + m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1 \\ = n_{i-1} + m_i + \dots + m_{j-1} + m_j + 1 = n_{i-1,j+1} + 1, \end{aligned}$$

d.h., wir können weiter schließen wie in (ii). \diamond

Das nun folgende Lemma wurde für polynomiale Splineräume in Nürnberger & Sommer [11] bewiesen.

Lemma 3.6 Seien ein n -dimensionaler IP-Raum S , $T \subseteq [a, b]$ und eine Abbildung $\sigma : T \rightarrow \{-1, 1\}$ gegeben. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt kein nicht-triviales $s \in S$ mit folgender Eigenschaft:

$$\sigma(t)s(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in T. \quad (3.7)$$

(ii) Es gelten die folgenden vier Bedingungen:

$$\text{Es gibt } t_1 < \dots < t_{n+1} \text{ in } T \text{ mit } \sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \text{ für } \nu = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für alle } j = 1, \dots, k \text{ gibt es zu } \mu := \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1 \text{ Punkte} \\ t_1 < \dots < t_\mu \text{ aus } [a, x_j) \cap T \text{ mit } \sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \text{ für alle} \\ \nu = 1, \dots, \mu - 1. \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für alle } i = 1, \dots, k \text{ gibt es zu } \mu := m_i + \dots + m_k + 1 \text{ Punkte} \\ t_1 < \dots < t_\mu \text{ aus } (x_i, b] \cap T \text{ mit } \sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \text{ für alle} \\ \nu = 1, \dots, \mu - 1. \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für alle } 1 \leq i < j \leq k \text{ gibt es zu } \mu := m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1 \\ \text{Punkte } t_1 < \dots < t_\mu \text{ aus } (x_i, x_j) \cap T \text{ mit } \sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \text{ für alle} \\ \nu = 1, \dots, \mu - 1. \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Wir zeigen zunächst (3.8). Angenommen, T enthält höchstens μ Punkte $t_1 < \dots < t_\mu$ mit

$$\sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, \mu - 1 \quad (3.12)$$

und $\mu \leq n$. Dann definieren wir für $\nu = 2, \dots, \mu$

$$z_{\nu-1} := \inf\{t; t \in (t_{\nu-1}, t_\nu] \cap T \text{ und } \sigma(t) = \sigma(t_\nu)\} \quad (3.13)$$

und setzen $z_0 := a$, $z_\mu := b$.

Wegen Satz 2.8 ist \mathcal{S} schwach tschebyscheff, und damit existiert nach Lemma 3.3 ein nicht-triviales $s \in \mathcal{S}$ mit

$$\sigma(t_1)(-1)^{\nu+1}s(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [z_{\nu-1}, z_\nu], \nu = 1, \dots, \mu. \quad (3.14)$$

Wir zeigen nun (3.7) und haben damit den gewünschten Widerspruch zu (i) erhalten. Sei dazu $\tilde{t} \in T$ beliebig. Falls $\tilde{t} \in \{z_1, \dots, z_{\mu-1}\}$, so folgt $s(\tilde{t}) = 0$ nach (3.14), d.h., (3.7) ist trivialerweise erfüllt. Andernfalls wählen wir $\nu \in \{1, \dots, \mu\}$ mit $\tilde{t} \in [z_{\nu-1}, z_\nu]$, und aus (3.13) sowie der Maximalität von μ erhalten wir $\sigma(\tilde{t}) = \sigma(t_\nu)$ (denn sonst gibt es einen zusätzlichen alternierenden Punkt), d.h., nach (3.12) und (3.14) folgt

$$\sigma(\tilde{t})s(\tilde{t}) = \sigma(t_\nu)s(\tilde{t}) = \sigma(t_1)(-1)^{\nu+1}s(\tilde{t}) \geq 0.$$

Damit ist (3.8) bewiesen.

(3.9): Angenommen, in $[a, x_j) \cap T$ gibt es höchstens $t_1 < \dots < t_\mu$ mit

$$\sigma(t_\nu)\sigma(t_{\nu+1}) = -1 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, \mu - 1$$

und $\mu \leq \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1}$. Nach Lemma 2.2 und Lemma 2.9 ist $\mathcal{S}_{j,k+1}^0$ ein schwach tschebyscheffscher Raum der Dimension $\tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1}$, und man erhält einen Widerspruch wie im Beweis von (3.8).

(3.10) und (3.11) beweist man analog.

(ii) \Rightarrow (i): Angenommen, es gibt ein nicht-triviales $s \in \mathcal{S}$ mit (3.7). Wegen (3.8) und Lemma 3.5, (i) existiert ein Intervall $[x_p, x_q]$ mit $s = 0$ auf $[x_p, x_q]$, und wir haben $[x_p, x_q] = [a, b]$ zu zeigen (denn dann gilt $s = 0$, ein Widerspruch). Falls dies nicht so ist, nehmen wir o.B.d.A. $[x_p, x_q]$ als maximales Intervall, in dem s verschwindet, und $q < k + 1$ an. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: s besitzt nur endlich viele Nullstellen in $[x_q, x_{k+1}]$.

Nach (3.7) und (3.10) folgt

$$SA(s)|_{[x_q, x_{k+1}]} \geq m_q + \dots + m_k + 1,$$

d.h., aus Lemma 3.5, (ii) ergibt sich ein Teilintervall von $[x_q, x_{k+1}]$, auf dem s verschwindet, im Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles.

Fall 2: Es gibt ein Intervall $[x_v, x_w]$ mit $v > q$, $s = 0$ auf $[x_v, x_w]$, und s besitzt nur endlich viele Nullstellen in $[x_q, x_v]$. (Dies ist wegen der Maximalität von $[x_p, x_q]$ der verbleibende Fall.)

Dann gilt nach (3.7) und (3.10)

$$SA(s)|_{(x_q, x_v)} \geq m_q + \dots + m_{v-1} - r_v + 1,$$

und der gewünschte Widerspruch ergibt sich aus Lemma 3.5, (iv). \diamond

Wir benötigen zur Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen noch das folgende Resultat aus Wulbert [14] (siehe auch Bartelt & McLaughlin [1] und Nürnberger [6]).

Satz 3.7 Seien G ein endlich-dimensionaler Teilraum von $C[a, b]$, $f \in C[a, b] \setminus G$ und $g_f \in G$. Dann sind äquivalent:

- (i) g_f ist stark eindeutig beste Approximation von f aus G .
- (ii) Für jede nicht-triviale Funktion $g \in G$ gilt:

$$\min_{t \in E(f - g_f)} (f(t) - g_f(t))g(t) < 0. \quad (3.15)$$

Wir können nun die Charakterisierung stark eindeutig bester Approximationen aus [9] beweisen. Wie bereits oben erwähnt, unterscheidet sich die Zählung der A-Punkte nach Definition 3.1 von der Zählung aus [9].

Satz 3.8 Für einen n -dimensionalen IP-Raum S , $f \in C[a, b] \setminus S$ und $s_f \in S$ sind äquivalent:

- (i) s_f ist stark eindeutig beste Approximation von f aus S .
- (ii) Es gelten die folgenden vier Bedingungen:

$$A(f - s_f)|_{[a, b]} \geq n + 1, \quad (3.16)$$

$$A(f - s_f)|_{[a, x_j]} \geq \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq k, \quad (3.17)$$

$$A(f - s_f)|_{(x_i, b]} \geq m_i + \dots + m_k + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k, \quad (3.18)$$

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k. \quad (3.19)$$

Beweis: Setzen wir $T := E(f - s_f)$ und $\sigma := \operatorname{sgn}(f - s_f)$, so ist (i) nach Satz 3.7 dazu äquivalent, daß es kein nicht-triviales $s \in \mathcal{S}$ gibt mit

$$(f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in T.$$

Nach Lemma 3.6 ist dies äquivalent zu (ii). \diamond

Wie Nürnberger & Singer [10] zeigten, ist eine Charakterisierung eindeutig bester Approximationen in polynomialen Splineräumen allein mit einem Kolmogoroff-Kriterium bzw. nur mit Hilfe alternierender Extrempunkte nicht möglich. Berens & Nürnberger [2] zeigten, daß man in beliebigen endlich-dimensionalen Teilräumen G von $C[a, b]$ die Funktionen aus dem Abschluß von

$$U(G) = \{f \in C[a, b] \setminus G; f \text{ hat eine eindeutig beste Approximation aus } G\}$$

allein mit Hilfe eines Kriteriums vom Kolmogoroff-Typ charakterisieren kann.

Satz 3.9 Seien G endlich-dimensionaler Teilraum von $C[a, b]$ und $f \in C[a, b] \setminus G$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f \in \overline{U(G)}$.
- (ii) f besitzt eine beste Approximation $g_f \in G$, so daß für alle nicht-trivialen $g \in G$ und alle Umgebungen U von $E(f - g_f)$

$$\inf_{t \in U} (f(t) - g_f(t))g(t) < 0. \tag{3.20}$$

Berens & Nürnberger [2] zeigten mit Hilfe dieses Satzes, daß für polynomiale Splineräume \mathcal{S} die Funktionen aus $\overline{U(\mathcal{S})}$ allein durch alternierende Extrempunkte charakterisiert werden können. Das nun folgende Resultat zeigt, daß eine solche Charakterisierung auch für IP-Räume möglich ist.

Satz 3.10 Für einen n -dimensionalen IP-Raum S und $f \in C[a, b] \setminus S$ sind äquivalent:

(i) $f \in \overline{U(S)}$.

(ii) Es existiert eine beste Approximation s_f von f mit:

$$A(f - s_f) |_{[a, b]} \geq n + 1, \quad (3.21)$$

$$A(f - s_f) |_{[a, x_j]} \geq \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq k, \quad (3.22)$$

$$A(f - s_f) |_{[x_i, b]} \geq m_i + \dots + m_k + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k, \quad (3.23)$$

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k. \quad (3.24)$$

Beweis: Nach Satz 3.9 ist $f \in \overline{U(S)}$ äquivalent zu folgender Aussage:

Es gibt eine beste Approximation $s_f \in S$ von f , so daß für alle Umgebungen U von $E(f - s_f)$ es kein nicht-triviales $s \in S$ gibt mit $(f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0$ für alle $t \in U$.

Dies ist nach Lemma 3.6 äquivalent zu:

Es gibt eine beste Approximation $s_f \in S$ von f , so daß für alle Umgebungen U von $E(f - s_f)$ die Aussagen (3.8) - (3.11) mit $T = U$ und $\sigma = \text{sgn}(f - s_f)$ gelten.

Wegen der Stetigkeit von $\text{sgn}(f - s_f)$ in den Punkten aus $E(f - s_f)$ erhalten wir hieraus die Äquivalenz zu (ii). \diamond

Nürnberg & Singer [10] verwenden in ihrer Charakterisierung eindeutig bester Approximationen aus polynomialen Splineräumen den Begriff der "Flachheit" der Fehlerfunktion. Dieses Resultat wurde von Nürnberg, Schumaker, Sommer & Strauß [9] auf verallgemeinerte tschebyscheffsche Splineräume (die wir in §4 definieren werden) erweitert. Unser Ziel ist es, ein vergleichbares Ergebnis für IP-Räume zu erhalten. Dazu benötigen wir einen Begriff aus [9].

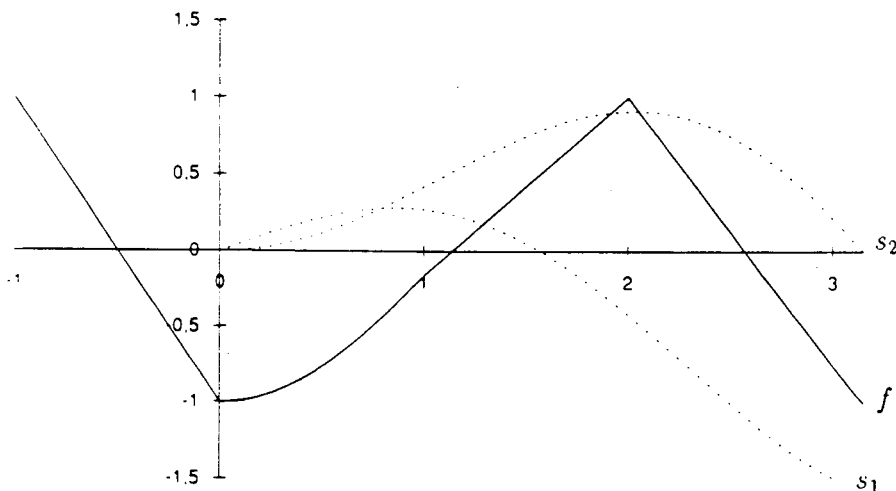
Definition 3.11 Es seien $f, g \in C[a, b]$, $a \leq x < b$ (bzw. $a < x \leq b$), und es gebe ein $\epsilon > 0$ mit $g(t) \neq g(x)$ für alle $x < t < x + \epsilon$ (bzw. $x - \epsilon < t < x$). Wir sagen, f ist in x flach von rechts (bzw. von links) bzgl. g , falls

$$\liminf_{t \rightarrow x+} \frac{|f(x) - f(t)|}{|g(x) - g(t)|} = 0 \quad (\text{bzw. } \liminf_{t \rightarrow x-} \frac{|f(x) - f(t)|}{|g(x) - g(t)|} = 0).$$

Um die Situation für IP-Räume zu beleuchten, betrachten wir zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 3.12 Wir untersuchen den Raum $\mathcal{S} \subseteq C[-1, \pi]$ mit $\Delta = \{0\}$ und $s|_{[-1, 0]} \in \text{span}\{1\}$, $s|_{[0, \pi]} \in \text{span}\{1, t \sin t, t \cos t\}$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Nach Zielke [15] ist $\text{span}\{1, t \sin t, t \cos t\}$ ein tschebyscheffscher Raum auf $[0, \pi]$, und damit ist \mathcal{S} ein verallgemeinerter Spliner Raum, der stetig aus tschebyscheffschen Räumen zusammengesetzt ist, also nach [7] ein IP-Raum. (Die Interlacing Property kann man hier auch mühelos direkt nachprüfen.)

Wir betrachten nun die Funktion f gegeben durch $f(-1) = f(2) := 1$, $f(t) := t \sin t - 1$ für $0 \leq t \leq 1$, $f(\pi) := -1$ und die ansonsten linear ist.



Offenbar ist die Nullfunktion eine beste Approximation von f aus \mathcal{S} und eindeutig beste Approximation von f auf $[-1, 0]$.

Wir setzen $s_1(t) := \frac{1}{2}t_+ \cos t$ und $s_2(t) := \frac{1}{2}t_+ \sin t$ (wobei t_+ die sogenannte "abgebrochene Potenz" ist, d.h. $t_+ = \max\{t, 0\}$) und erhalten damit $\mathcal{S}_{0,1}^0 = \text{span}\{s_1, s_2\}$.

Sei $s := \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$ eine beste Approximation von f aus \mathcal{S} . Dann folgt

$$1 = \|f\| = \|f - s\| \geq |f(\pi) - s(\pi)| = |-1 + \alpha_1 \frac{\pi}{2}|$$

und damit $\alpha_1 \geq 0$.

Falls $\alpha_1 > 0$ erhalten wir ein positives, nahe bei 0 liegendes t mit

$$|f(t) - s(t)| > 1 = \|f - s\|$$

(denn f und s_2 sind in 0 flach von rechts bzgl. s_1), ein Widerspruch. Also gilt $\alpha_1 = 0$, und wegen

$$1 = \|f - s\| \geq |f(2) - s(2)| = |1 - \alpha_2 \sin 2|$$

folgt $\alpha_2 \geq 0$.

Umgekehrt sind alle Funktionen $\alpha_2 s_2$ mit $\alpha_2 \geq 0$ und hinreichend kleinem $|\alpha_2|$ offenbar beste Approximationen von f aus \mathcal{S} . Also ist die beste Approximation von f aus \mathcal{S} nicht eindeutig bestimmt, obwohl f in 0 flach von rechts ist bzgl. der in 0 "steilsten" Funktion aus $\mathcal{S}_{0,1}^0$. Damit ist eine direkte Verallgemeinerung des oben erwähnten Resultats aus [9] auf IP-Räume nicht möglich.

Ändert man f lokal um π so ab, daß f flach von links bzgl. s_2 ist, so gilt für alle $\alpha > 0$ lokal

$$|f(t) - \alpha s_2(t)| > 1,$$

d.h., die Nullfunktion ist eindeutig beste Approximation von f aus \mathcal{S} . Also hängt eine Charakterisierung eindeutig bester Approximationen auch vom Verhalten der Fehlerfunktion um π ab.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Eine Charakterisierung eindeutig bester Approximationen allein mit Hilfe von alternierenden Extrempunkten und der Flachheit an gewissen inneren Knoten wie im Fall der polynomialen und der verallgemeinerten tschebyscheffschen Splines ist für IP-Räume nicht möglich. Wir beginnen unsere Charakterisierung mit zwei Lemmata.

Lemma 3.13 Seien $f, s, s_f \in C[a, b]$ und $a \leq t_0 \leq b$ mit $t_0 \in E(f - s_f)$.

(i) Gelte $s(t_0) = s_f(t_0)$. Existiert ein $\epsilon > 0$ mit

$$(f(t) - s_f(t))(s(t) - s_f(t)) < 0 \quad (3.25)$$

für alle $t_0 < t < t_0 + \epsilon$ (bzw. $t_0 - \epsilon < t < t_0$) und ist $f - s_f$ in t_0 flach von rechts (bzw. flach von links) bzgl. $s - s_f$, so gibt es ein $\tilde{t} \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ (bzw. $\tilde{t} \in (t_0 - \epsilon, t_0)$) mit

$$|f(\tilde{t}) - s(\tilde{t})| > \|f - s_f\|.$$

(ii) Gelte $s(t_0) = 0$. Existiert ein $\epsilon > 0$ mit

$$(f(t) - s_f(t))s(t) < 0 \quad (3.26)$$

für alle $t_0 < t < t_0 + \epsilon$ (bzw. $t_0 - \epsilon < t < t_0$) und ist $f - s_f$ in t_0 nicht flach von rechts (bzw. flach von links) bzgl. s , so gibt es $\epsilon_0 > 0$ und $\alpha_0 > 0$ mit

$$|f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \leq \|f - s_f\|$$

für alle $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ und $t_0 \leq t < t_0 + \epsilon_0$ (bzw. $t_0 - \epsilon_0 < t \leq t_0$).

Beweis: (i): Da $f - s_f$ flach von rechts bzgl. $s - s_f$ ist, gibt es ein $\tilde{t} \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ mit

$$\begin{aligned} |(f(t_0) - s_f(t_0)) - (f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))| &< |(s(t_0) - s_f(t_0)) - (s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))| \\ &= |s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nach (3.25) kann $f - s_f$ in $(t_0, t_0 + \epsilon)$ keine Nullstelle besitzen, und damit folgt wegen $t_0 \in E(f - s_f)$, daß $|f(t_0) - s_f(t_0)| > 0$. Dies impliziert mit (3.25)

$$\operatorname{sgn}(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) = \operatorname{sgn}(f(t_0) - s_f(t_0)). \quad (3.28)$$

Falls $\tilde{t} \in E(f - s_f)$, folgt aus (3.25)

$$\begin{aligned} |f(\tilde{t}) - s(\tilde{t})| &= |(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) - (s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))| \\ &= |f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| + |s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| \\ &= \|f - s_f\| + |s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| \\ &> \|f - s_f\|. \end{aligned}$$

Im Fall $\tilde{t} \notin E(f - s_f)$ folgt aus $t_0 \in E(f - s_f)$

$$\operatorname{sgn}\left((f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) - (f(t_0) - s_f(t_0))\right) = -\operatorname{sgn}(f(t_0) - s_f(t_0))$$

und damit nach (3.25), (3.27) und (3.28)

$$\begin{aligned} |f(\tilde{t}) - s(\tilde{t})| &= |(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) - (f(t_0) - s_f(t_0)) - (s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) + (f(t_0) - s_f(t_0))| \\ &= |f(t_0) - s_f(t_0)| + |s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| - |(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) - (f(t_0) - s_f(t_0))| \\ &> |f(t_0) - s_f(t_0)| = \|f - s_f\|. \end{aligned}$$

(ii): Da $f - s_f$ in t_0 nicht flach von rechts bzgl. s ist, gibt es $\alpha_0, \tilde{\epsilon} > 0$ mit

$$|(f(t_0) - s_f(t_0)) - (f(t) - s_f(t))| \geq \alpha |s(t_0) - s(t)| = \alpha |s(t)| \quad (3.29)$$

für alle $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $t_0 < t < t_0 + \tilde{\epsilon}$. Wie im Beweis von (i) schließen wir

$$\operatorname{sgn}(f(t) - s_f(t)) = \operatorname{sgn}(f(t_0) - s_f(t_0)) \quad (3.30)$$

für alle $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ und erhalten hieraus wegen $t_0 \in E(f - s_f)$

$$|(f(t) - s_f(t)) - (f(t_0) - s_f(t_0))| < |f(t_0) - s_f(t_0)| \quad (3.31)$$

für alle $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$. Nach (3.29) und (3.30) gilt $t \notin E(f - s_f)$ für alle $t \in (t_0, t_0 + \epsilon_0)$ mit $\epsilon_0 := \min\{\tilde{\epsilon}, \epsilon\}$. Wie im Beweis von (i) folgt nun aus (3.26), (3.29), (3.30) und (3.31), daß für alle $t \in (t_0, t_0 + \epsilon_0)$ und $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$

$$\begin{aligned} |f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| &= |(f(t) - s_f(t)) - (f(t_0) - s_f(t_0)) - \alpha s(t) + (f(t_0) - s_f(t_0))| \\ &= |f(t_0) - s_f(t_0)| + \alpha |s(t)| - |(f(t) - s_f(t)) - (f(t_0) - s_f(t_0))| \\ &\leq |f(t_0) - s_f(t_0)| = \|f - s_f\|. \quad \diamond \end{aligned}$$

Das folgende Resultat wurde im Fall polynomialer Splines von Nürnberger & Sommer [11] bewiesen.

Lemma 3.14 Sind ein n -dimensionaler IP-Raum S und $f \in C[a, b] \setminus S$ gegeben, so gibt es ein Teilintervall $[x_i, x_j]$ von $[a, b]$, so daß jede beste Approximation s von f aus S sogar stark eindeutig beste Approximation von f auf $[x_i, x_j]$ ist.

Beweis: Da \mathcal{S} nach Satz 2.8 schwach tschebyscheff ist, gibt es nach einem bekannten Resultat von Jones & Karlowitz [3] eine beste Approximation s_f von f mit

$$A(f - s_f) |_{[a,b]} \geq n + 1.$$

Wir wählen nun ein Teilintervall $[x_i, x_j]$ von $[a, b]$ mit

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq n_{i,j} + 1 \quad \text{und} \quad A(f - s_f) |_{[x_p, x_q]} \leq n_{p,q} \quad (3.32)$$

für jedes echte Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$.

Falls $s_f |_{[x_i, x_j]}$ nicht stark eindeutig beste Approximation von f aus $\mathcal{S}_{i,j}$ ist, existiert nach Satz 3.7 eine nicht-triviale Funktion $s \in \mathcal{S}_{i,j}$ mit

$$(f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in E(f - s_f) \cap [x_i, x_j].$$

Hieraus folgt mit (3.32)

$$SA(s) |_{[x_i, x_j] \cap E(f - s_f)} \geq n_{i,j} + 1$$

und

$$SA(s) |_{[x_p, x_q] \cap E(f - s_f)} \leq n_{p,q}$$

für jedes echte Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$. Da $\mathcal{S}_{i,j}$ nach den Sätzen 2.8 und 2.10 schwach tschebyscheff ist, schließen wir mit Lemma 3.4, daß $s = 0$ auf $[x_i, x_j]$, ein Widerspruch. \diamond

Wir geben nun eine Charakterisierung eindeutig bester Approximationen aus IP-Räumen. Beispiel 3.12 zeigt, daß eine einfachere Charakterisierung nicht möglich ist.

Satz 3.15 Für einen n -dimensionalen IP-Raum \mathcal{S} , $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{S}$ und $s_f \in \mathcal{S}$ sind äquivalent:

(i) s_f ist eindeutig beste Approximation von f aus \mathcal{S} .

(ii) Es gelten (3.21) - (3.24) und zusätzlich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{(x_i, b]} = m_i + \dots + m_k \text{ für ein } 1 \leq i \leq k \text{ gilt, so existiert} \\ \text{zu jedem } s \in \mathcal{S}_{0,i}^0 \setminus \{0\} \text{ mit } (f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in E(f - s_f) \\ \text{ein } \tilde{t} \in E(f - s_f) \text{ und ein } \sigma \in \{-, +\} \text{ mit folgenden Eigenschaften:} \\ (\alpha) \quad s(\tilde{t}) = 0. \\ (\beta) \quad \text{Es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ mit } (f(t) - s_f(t))s(t) < 0 \text{ für alle} \\ \quad t \in \begin{cases} (\tilde{t} - \epsilon, \tilde{t}), & \text{falls } \sigma = -; \\ (\tilde{t}, \tilde{t} + \epsilon), & \text{falls } \sigma = +. \end{cases} \\ (\gamma) \quad f - s_f \text{ ist in } \tilde{t} \text{ flach bzgl. } s \text{ von } \begin{cases} \text{links,} & \text{falls } \sigma = -; \\ \text{rechts,} & \text{falls } \sigma = +. \end{cases} \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{[a, x_j)} = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} \text{ für ein } 1 \leq j \leq k \text{ gilt, so} \\ \text{existiert zu jedem } s \in \mathcal{S}_{j,k+1}^0 \setminus \{0\} \text{ mit } (f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \text{ für} \\ \text{alle } t \in E(f - s_f) \text{ ein } \tilde{t} \in E(f - s_f) \text{ und ein } \sigma \in \{-, +\} \text{ mit den} \\ \text{Eigenschaften } (\alpha) - (\gamma) \text{ aus (3.33).} \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} \leq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k \text{ gilt,} \\ \text{so existiert zu jedem } s \in (\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0) \setminus \{0\} \text{ mit } (f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \\ \text{für alle } t \in E(f - s_f) \text{ ein } \tilde{t} \in E(f - s_f) \text{ und ein } \sigma \in \{-, +\} \text{ mit den} \\ \text{Eigenschaften } (\alpha) - (\gamma) \text{ aus (3.33).} \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): (3.21) - (3.24) gelten nach Satz 3.10.

Angenommen, (3.33) gilt nicht. Sei also $s \in \mathcal{S}_{0,i}^0 \setminus \{0\}$ mit $(f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0$ für alle $t \in E(f - s_f)$ so gewählt, daß kein \tilde{t} wie in (3.33) existiert. Da jede nicht-triviale Funktion eines tschebyscheffschen Raumes nur endlich viele Nullstellen haben kann, gilt für alle $\tilde{t} \in E(f - s_f)$ eine der drei Aussagen:

$$(\alpha) \quad s(\tilde{t}) \neq 0, \text{ d.h. } (f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))s(\tilde{t}) > 0.$$

$$(\beta) \quad \text{Es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ mit } (f(t) - s_f(t))s(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in (\tilde{t} - \epsilon, \tilde{t} + \epsilon) \cap [a, b].$$

$$(\gamma) \quad \text{Falls ein } \epsilon > 0 \text{ existiert mit } (f(t) - s_f(t))s(t) < 0 \text{ für alle } t \in (\tilde{t} - \epsilon, \tilde{t}) \text{ (bzw.} \\ t \in (\tilde{t}, \tilde{t} + \epsilon)), \text{ so ist } f - s_f \text{ in } \tilde{t} \text{ nicht flach bzgl. } s \text{ von links (bzw. rechts).}$$

Nach Lemma 3.13, (ii) existiert eine in $[a, b]$ offene Umgebung U von $E(f - s_f)$ und ein $\alpha_0 > 0$ mit

$$|f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \leq \|f - s_f\| \quad (3.36)$$

für alle $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ und $t \in U$.

Da $[a, b] \setminus U$ kompakt ist, existiert ein $K > 0$ mit

$$|f(t) - s_f(t)| \leq \|f - s_f\| - K \quad (3.37)$$

für alle $t \in [a, b] \setminus U$. Setzen wir nun $\alpha := \min\{\alpha_0, \frac{K}{\|s\|}\}$, so folgt aus (3.37)

$$\begin{aligned} |f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| &\leq |f(t) - s_f(t)| + \alpha |s(t)| \\ &\leq \|f - s_f\| - K + K = \|f - s_f\| \end{aligned}$$

für alle $t \in [a, b] \setminus U$, und wegen (3.36) gilt diese Aussage auch für alle $t \in U$, d.h., $s_f + \alpha s$ ist beste Approximation von f im Widerspruch zur Eindeutigkeit von s_f .

(3.34) und (3.35) zeigt man analog.

(ii) \Rightarrow (i): Wegen (3.21) und Satz 3.2 ist s_f beste Approximation von f . Wir nehmen nun an, daß $s \neq s_f$ ebenfalls eine beste Approximation von f aus \mathcal{S} ist. Dann gilt offenbar

$$(f(t) - s_f(t))(s(t) - s_f(t)) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in E(f - s_f) \quad (3.38)$$

(sonst gilt $|f(t) - s(t)| = |(f(t) - s_f(t)) - (s(t) - s_f(t))| = |f(t) - s_f(t)| + |s(t) - s_f(t)| > |f(t) - s_f(t)| = \|f - s_f\| = \|f - s\|$, ein Widerspruch).

Nach Lemma 3.14 existiert ein Intervall $[x_i, x_j]$ mit $s = s_f$ auf $[x_i, x_j]$. Sei o.B.d.A. $[x_i, x_j]$ maximal mit dieser Eigenschaft gewählt. Wegen $s \neq s_f$ gilt $[x_i, x_j] \neq [a, b]$. Wir nehmen o.B.d.A. $j < k + 1$ an und unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $s - s_f$ besitzt nur endlich viele Nullstellen in $[x_j, b]$.

Wegen (3.23) gilt

$$A(f - s_f)|_{[x_j, b]} \geq m_j + \dots + m_k + 1.$$

Falls $A(f - s_f)|_{(x_j, b]} \geq m_j + \dots + m_k + 1$ so folgt nach (3.38)

$$SA(s - s_f)|_{(x_j, b]} \geq m_j + \dots + m_k + 1,$$

d.h., nach Lemma 3.5, (ii) existiert ein Teilintervall von $[x_j, b]$ mit $s = s_f$ auf diesem Teilintervall, ein Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles. Also gilt

$$A(f - s_f)|_{(x_j, b)} = m_j + \dots + m_k. \quad (3.39)$$

Wir definieren nun \tilde{s} durch

$$\tilde{s}(t) := \begin{cases} s_f(t), & \text{falls } t < x_j; \\ s(t), & \text{falls } t \geq x_j. \end{cases}$$

Wegen $s = s_f$ auf $[x_{j-1}, x_j]$ und Korollar 2.13 folgt $\tilde{s} \in \mathcal{S}$. Offenbar bleibt (3.38) richtig, wenn man s durch \tilde{s} ersetzt, und wegen $\tilde{s} - s_f \in \mathcal{S}_{0,j}^0 \setminus \{0\}$ existiert zu $\tilde{s} - s_f$ ein \tilde{t} wie in (3.33).

Natürlich gilt $\tilde{t} \in [x_j, b]$ und im Fall $\tilde{t} = x_j$ auch $\sigma = +$. In jedem Fall folgt aus Lemma 3.13, (i) die Existenz eines $t^* \in (x_j, b]$ mit

$$\|f - s_f\| < |f(t^*) - \tilde{s}(t^*)| = |f(t^*) - s(t^*)|,$$

d.h., s ist nicht beste Approximation von f , ein Widerspruch.

Fall 2: Es gibt ein Intervall $[x_p, x_q]$, so daß $j < p$, $s = s_f$ auf $[x_p, x_q]$ und $s - s_f$ nur endlich viele Nullstellen in $[x_j, x_p]$ besitzt. (Dies ist wegen der Maximalität von $[x_i, x_j]$ der verbleibende Fall.)

Diesen Fall beweist man analog unter Benutzung von (3.35) und Lemma 3.5, (iv). \diamond

Satz 3.15 charakterisiert eindeutig beste Approximationen aus IP-Räumen mit Hilfe von alternierenden Extrempunkten und einer Flachheitsbedingung der Fehlerfunktion an einem nicht näher spezifizierten Punkt. Wie Beispiel 3.12 zeigt, ist bei IP-Räumen eine Charakterisierung nur mit Alternantenbedingungen und der Flachheit an gewissen inneren Knoten (wie im Fall polynomialer und verallgemeinerter tschebyscheffscher Splines) nicht möglich. Man kann jedoch mit diesen Hilfsmitteln notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen für eindeutig beste Approximationen aus IP-Räumen erhalten. Wir formulieren zunächst die notwendigen Bedingungen.

Korollar 3.16 Seien S ein n -dimensionaler IP-Raum und $s_f \in S$ die eindeutig beste Approximation von $f \in C[a, b] \setminus S$ aus S . Dann gelten (3.21) - (3.24) und zusätzlich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gilt } A(f - s_f)|_{(x_i, b]} = m_i + \dots + m_k > 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq k, \text{ so existiert} \\ \text{ein } s \in S_{0,i}^0, \text{ so daß } f - s_f \text{ in } x_i \text{ flach von rechts bzgl. } s \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gilt } A(f - s_f)|_{[a, x_j)} = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} > 0 \text{ für ein } 1 \leq j \leq k, \text{ so} \\ \text{existiert ein } s \in S_{j,k+1}^0, \text{ so daß } f - s_f \text{ in } x_j \text{ flach von links bzgl. } s \\ \text{ist.} \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gilt } A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0 \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \\ \text{so existiert ein } s \in S_{0,i}^0 \cap S_{j,k+1}^0, \text{ so daß } f - s_f \text{ in } x_i \text{ flach von rechts} \\ \text{bzgl. } s \text{ oder in } x_j \text{ flach von links bzgl. } s \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gilt } A(f - s_f)|_{(x_i, x_j]} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0 \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \\ \text{so existiert ein } s \in S_{0,i}^0 \cap S_{j,k+1}^0, \text{ so daß } f - s_f \text{ in } x_i \text{ flach von rechts} \\ \text{bzgl. } s \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gilt } A(f - s_f)|_{[x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0 \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \\ \text{so existiert ein } s \in S_{0,i}^0 \cap S_{j,k+1}^0, \text{ so daß } f - s_f \text{ in } x_j \text{ flach von links} \\ \text{bzgl. } s \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

Beweis: (3.21) - (3.24) gelten nach Satz 3.10. Wir zeigen nun (3.40).

(Gilt $A(f - s_f)|_{(x_i, b]} = m_i + \dots + m_k > 0$, so existieren eindeutig bestimmte Mengen T_1, \dots, T_μ mit $\mu := m_i + \dots + m_k$,

$$E(f - s_f) \cap (x_i, b] = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} T_\nu$$

und $t_\nu < t_{\nu+1}$, $\text{sgn}(f(t_\nu) - s_f(t_\nu)) = -\text{sgn}(f(t_{\nu+1}) - s_f(t_{\nu+1}))$ für alle $t_\nu \in T_\nu$, $t_{\nu+1} \in T_{\nu+1}$ und $\nu = 1, \dots, \mu - 1$. Wir wählen nun $z_1, \dots, z_{\mu-1}$ mit

$$\max T_\nu < z_\nu < \min T_{\nu+1}$$

für alle $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ und setzen $z_0 := a$, $z_\mu := b$. Nach Lemma 2.9 und Lemma 3.3 existiert ein nicht-triviales $s \in S_{0,i}^0$ mit

$$\tau(-1)^{\nu+1} s(t) \geq 0 \quad \text{für } t \in [z_{\nu-1}, z_\nu], \nu = 1, \dots, \mu,$$

wobei $\tau := \operatorname{sgn}(f(\underline{t}_1) - s_f(\underline{t}_1))$ und $\underline{t}_1 := \min T_1$.

Nach Satz 3.15 existieren \tilde{t} und $\sigma \in \{-, +\}$ mit den Eigenschaften $(\alpha) - (\gamma)$ aus (3.33). Offenbar folgt $\tilde{t} = x_i$ und $\sigma = +$. Dies beweist (3.40), und der Beweis von (3.41) - (3.44) verläuft analog. \diamond

Als Korollar zum Beweis von Satz 3.15 ergeben sich hinreichende Bedingungen für eindeutig beste Approximationen aus IP-Räumen.

Korollar 3.17 Seien \mathcal{S} ein n -dimensionaler IP-Raum, $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{S}$ und neben (3.21) - (3.24) noch folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{(x_i, b]} = m_i + \dots + m_k \text{ für ein } 1 \leq i \leq k \text{ gilt, so ist} \\ f - s_f \text{ in } x_i \text{ flach von rechts bzgl. allen } s \in \mathcal{S}_{0,i}^0 \setminus \mathcal{S}_{0,i+1}^0. \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{[a, x_j]} = \tilde{m}_0 + \dots + \tilde{m}_{j-1} \text{ für ein } 1 \leq j \leq k \text{ gilt, so ist} \\ f - s_f \text{ in } x_j \text{ flach von links bzgl. allen } s \in \mathcal{S}_{j,k+1}^0 \setminus \mathcal{S}_{j-1,k+1}^0. \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \text{ so} \\ \text{gilt für alle } s \in (\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0) \setminus (\mathcal{S}_{0,i+1}^0 \cup \mathcal{S}_{j-1,k+1}^0): \\ f - s_f \text{ ist in } x_i \text{ flach von rechts bzgl. } s \text{ oder in } x_j \text{ flach von links} \\ \text{bzgl. } s. \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \text{ so} \\ \text{ist } f - s_f \text{ in } x_i \text{ flach von rechts bzgl. allen} \\ s \in (\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0) \setminus (\mathcal{S}_{0,i+1}^0 \cup \mathcal{S}_{j-1,k+1}^0). \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } A(f - s_f)|_{[x_i, x_j]} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k, \text{ so} \\ \text{ist } f - s_f \text{ in } x_j \text{ flach von links bzgl. allen} \\ s \in (\mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0) \setminus (\mathcal{S}_{0,i+1}^0 \cup \mathcal{S}_{j-1,k+1}^0). \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

Dann ist s_f eindeutig beste Approximation von f aus \mathcal{S} .

Beweis: Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Satz 3.15, (ii) \Rightarrow (i) vor. Fall 1 führt man genau wie dort zum Widerspruch, denn Lemma 3.13, (i) ist wegen Lemma 3.5, (ii) und (3.45) anwendbar. Wir zeigen nun Fall 2. Setzen wir $\mu := m_j + \dots + m_{p-1} - r_p$, so gilt wegen (3.24), daß $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} \geq \mu + 1$.

Falls $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} \geq \mu + 1$ gilt, folgt aus (3.38), daß $SA(s - s_f)|_{[x_j, x_p]} \geq \mu + 1$, und damit existiert nach Lemma 3.5, (iv) ein Teilintervall von $[x_j, x_p]$ mit $s = s_f$ auf diesem Teilintervall, ein Widerspruch.

Wir betrachten nun den Fall $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} = \mu$. Gilt zusätzlich $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} = \mu + 2$, so folgt nach (3.38), Lemma 3.5, (iv) und (3.47), daß Lemma 3.13, (i) anwendbar ist, ein Widerspruch. Im Fall $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} = \mu + 1$ nehmen wir o.B.d.A. $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} = \mu$ an und können in diesem Fall das Lemma 3.13, (i) wegen (3.38), Lemma 3.5, (iv) und (3.48) anwenden.

Im verbleibenden Fall $A(f - s_f)|_{[x_j, x_p]} = \mu - 1$ ergibt sich der gewünschte Widerspruch aus (3.48) und (3.49). \diamond

Aus Korollar 3.16 und Korollar 3.17 ergibt sich im Fall polynomialer Splineräume mit einfachen Knoten die bekannte Charakterisierung eindeutig bester Approximationen in diesen Räumen aus Nürnberger & Singer [10] (siehe auch [6], II, Satz 4.6).

§4 Verallgemeinerte tschebyscheffsche Splineräume

In diesem Abschnitt untersuchen wir verallgemeinerte tschebyscheffsche Splineräume, die in Nürnberger, Schumaker, Sommer & Strauß [8] eingeführt wurden. Diese Räume wurden in einer solchen Allgemeinheit definiert, daß die Theorie aus [7] nicht direkt anwendbar ist. Daher zeigen wir zunächst einige Aussagen über Interpolation in solchen Räumen und die Dimension von gewissen Teilräumen. Schließlich beweisen wir ein Resultat über die Eindeutigkeit bester Approximationen, das für polynomiale Splines bereits in Berens & Nürnberger [2] enthalten ist.

Wir beginnen mit der Definition der hier relevanten Räume. Für gegebene positive Funktionen $w_i \in C^{m-i}[a, b]$, $i = 1, \dots, m$ definieren wir

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= w_1(x), \\ u_2(x) &:= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) ds_2, \\ &\vdots \\ u_m(x) &:= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \dots \int_a^{s_{m-1}} w_m(s_m) ds_m \dots ds_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Karlin & Studden [4] zeigten, daß diese Funktionen ein erweitertes vollständiges Tschebyscheff-System bilden. Wir setzen $\mathcal{U} := \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$.

Sei nun $\Delta := \{x_i\}_{i=1}^k$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle $I_i := [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \dots, k-1$ und $I_k := [x_k, x_{k+1}]$. Ferner seien $\mathcal{N} := (n_0, \dots, n_k)$ und $\mathcal{R} := (r_1, \dots, r_k)$ Vektoren ganzer Zahlen mit $0 \leq n_i \leq m$, $i = 0, \dots, k$ und $0 \leq r_i \leq n_i$, $i = 1, \dots, k$. Schließlich setzen wir $\mathcal{U}_i := \text{span}\{u_1, \dots, u_{n_i}\}$.

Definition 4.1 Sind \mathcal{U} , \mathcal{N} , \mathcal{R} und Δ wie oben gegeben, so heißt die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{U}; \mathcal{N}; \mathcal{R}; \Delta) &:= \{s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; s|_{I_i} \in \mathcal{U}_i, i = 0, \dots, k \text{ und} \\ &\quad D_-^{j-1} s(x_i) = D_+^{j-1} s(x_i), j = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, k\} \end{aligned}$$

ein verallgemeinerter tschebyscheffscher Splineraum (VTS-Raum).

Die Teilstücke der Splinefunktionen stammen also aus gewissen "Abschnitten" eines fixierten Raumes und sind durch Differenzierbarkeitsbedingungen an den Knoten miteinander verknüpft. Die Zahl r_i gibt hierbei die Anzahl der Verknüpfungen von $s|_{I_{i-1}}$ zu $s|_{I_i}$ an. In obiger Definition wird lediglich $r_i \leq n_i$ gefordert, wobei n_i die Dimension des auf I_i zugrundeliegenden Raumes ist. Insbesondere ist $n_{i-1} > r_i$ möglich, d.h., ein verallgemeinerter tschebyscheffscher Splineraum ist kein verallgemeinerter Splineraum im Sinne von Definition 2.1. Die Resultate aus §2 sind daher nicht anwendbar.

Der folgende Satz aus [8] gibt Auskunft über die Dimension von VTS-Räumen. Wie in §2 setzen wir $m_i := n_i - r_i$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $n_{i,j} := \dim \mathcal{S}|_{[x_i, x_j]}$ für einen VTS-Raum \mathcal{S} und $0 \leq i < j \leq k+1$.

Satz 4.2 In einem VTS-Raum \mathcal{S} gilt die Dimensionsformel

$$\dim \mathcal{S} = n_0 + m_1 + \dots + m_k. \quad (4.2)$$

Die Dimensionsformel (2.28) ist im allgemeinen in VTS-Räumen nicht richtig, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

Beispiel 4.3 In einem VTS-Raum \mathcal{S} mit $k = n_0 = 1$, $r_1 = 2$ und $n_1 = 3$ gilt

$$n_{1,2} = \dim \mathcal{S}|_{[x_1, x_2]} \leq \dim \mathcal{S} = 1 + 3 - 2 = 2 < 3 = n_1.$$

Unser Ziel ist es, ein (2.28) in VTS-Räumen entsprechendes Resultat zu beweisen. Wir definieren zunächst einen VTS-Raum auf einem Teilintervall von $[a, b]$, der als Dimension die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung (2.28) besitzt.

Definition 4.4 Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{U}; \mathcal{N}; \mathcal{R}; \Delta)$ ein VTS-Raum. Für $0 \leq i < j \leq k+1$ bezeichnen wir mit

$$\widehat{\mathcal{S}}_{i,j} := \mathcal{S}(\mathcal{U}; \mathcal{N}_{i,j}; \mathcal{R}_{i,j}; \Delta_{i,j}) \quad (4.3)$$

den VTS-Raum auf $[x_i, x_j]$ mit $\mathcal{N}_{i,j} := (n_i, \dots, n_{j-1})$, $\mathcal{R}_{i,j} := (r_{i+1}, \dots, r_{j-1})$ und $\Delta_{i,j} := (x_{i+1}, \dots, x_{j-1})$. Weiterhin setzen wir

$$\widehat{n}_{i,j} := \dim \widehat{\mathcal{S}}_{i,j}. \quad (4.4)$$

Bemerkung 4.5 Nach Satz 4.2 gilt

$$\widehat{n}_{i,j} = n_i + m_{i+1} + \dots + m_{j-1}. \quad (4.5)$$

Man erhält eine Einbettung von $\mathcal{S}|_{[x_i, x_j]}$ in $\widehat{\mathcal{S}}_{i,j}$, indem man jede Funktion $s \in \mathcal{S}|_{[x_i, x_j]}$ in x_j stetig fortsetzt, d.h.

$$n_{i,j} \leq \widehat{n}_{i,j}. \quad (4.6)$$

Im Fall $i = 0$ gilt

$$n_{0,j} = \dim \mathcal{S}|_{[x_0, x_j]} = \dim \widehat{\mathcal{S}}_{0,j} = \widehat{n}_{0,j} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, k+1, \quad (4.7)$$

d.h., in diesem Fall bleibt (2.28) richtig.

Wesentliches Hilfsmittel unserer Untersuchungen von VTS-Räumen ist ein Resultat aus [8], das eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen in VTS-Räumen angibt. Wir definieren dazu zunächst die Zählweise der Nullstellen.

Definition 4.6 Seien \mathcal{S} ein VTS-Raum und $s \in \mathcal{S}$.

(i) Isolierte Nullstelle: Seien

$$s(t-) = D_- s(t) = \dots = D_-^{l-1} s(t) = 0 \neq D_-^l s(t)$$

$$s(t+) = D_+ s(t) = \dots = D_+^{r-1} s(t) = 0 \neq D_+^r s(t)$$

für $l, r \geq 0$ und s verschwinde in keinem Teilintervall von $[a, b]$, das t enthält.

Setzen wir $\alpha := \max\{l, r\}$, so hat s eine *isolierte Nullstelle in t der Vielfachheit*

$$z = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{falls } \alpha \text{ gerade und } s \text{ in } t \text{ das Vorzeichen wechselt;} \\ \alpha + 1, & \text{falls } \alpha \text{ ungerade und } s \text{ in } t \text{ nicht das Vorzeichen wechselt;} \\ \alpha, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Linksseitiges Endintervall: Seien $0 < j < k + 1$, $s(t) = 0$ für alle $a \leq t < x_j$ und $s(t) \neq 0$ für ein $x_j < t < x_{j+1}$. Dann ist $[a, x_j)$ eine *Intervallnullstelle von s der Vielfachheit $z = n_{0,j}$* .

(iii) Rechtsseitiges Endintervall: Seien $0 < i < k + 1$, $s(t) = 0$ für alle $x_i < t \leq b$ und $s(t) \neq 0$ für ein $x_{i-1} < t < x_i$. Dann ist $(x_i, b]$ eine *Intervallnullstelle von s der Vielfachheit $z = \hat{n}_{i,k+1}$* .

(iv) Inneres Intervall: Seien $0 < i < j < k + 1$, $s(t) = 0$ für alle $x_i < t < x_j$ und $s(t_1) \neq 0 \neq s(t_2)$ für ein $x_{i-1} < t_1 < x_i$ und ein $x_j < t_2 < x_{j+1}$. Setzen wir $\alpha := \hat{n}_{i,j}$, so ist (x_i, x_j) eine *Intervallnullstelle von s der Vielfachheit*

$$z = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{falls } \alpha \text{ gerade und } s \text{ das Vorzeichen wechselt;} \\ \alpha + 1, & \text{falls } \alpha \text{ ungerade und } s \text{ nicht das Vorzeichen wechselt;} \\ \alpha, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen Spline $s \in \mathcal{S}$ schreiben wir $Z^{\mathcal{S}}(s)$ für die (vom Raum \mathcal{S} abhängige) Anzahl der Nullstellen von s . Damit ergibt sich der folgende Satz aus [8].

Satz 4.7 In einem n -dimensionalen VTS-Raum \mathcal{S} gilt für jedes nicht-triviale $s \in \mathcal{S}$

$$Z^{\mathcal{S}}(s) \leq n - 1. \quad (4.8)$$

Wie schon in [8] angemerkt wurde, erhält man als Korollar zu diesem Satz, daß jeder VTS-Raum, der nur aus stetigen Funktionen besteht (d.h. $r_i \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, k$), schwach tschebyscheff ist. (Dies gilt nicht nach [8], Korollar 3.7, da ein VTS-Raum aus Definition 4.1 kein verallgemeinerter Spliner Raum im Sinne von Definition 2.1 ist und daher Satz 2.8 nicht angewendet werden kann.)

Korollar 4.8 *Jeder VTS-Raum $\mathcal{S} \subseteq C[a, b]$ ist schwach tschebyscheff.*

Beweis: Angenommen, es existiert ein $s \in \mathcal{S}$ mit $n = \dim \mathcal{S}$ Vorzeichenwechseln, d.h., es gibt $z_1 < \dots < z_{n+1}$ mit

$$s(z_\nu)s(z_{\nu+1}) < 0 \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Menge $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ mit $t_\nu \in (z_\nu, z_{\nu+1})$ und $s(t_\nu) = 0$ für alle $\nu = 1, \dots, n$. Da s wegen (4.9) nicht trivial ist, besitzt s nach Satz 4.7 höchstens $n - 1$ Nullstellen, wenn diese gemäß Definition 4.6 gezählt werden. Also existiert ein Intervall I mit

$$s(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in I, \quad (4.10)$$

das als $r \geq 0$ Nullstellen gezählt wird, und so daß \bar{I} mindestens $r + 1$ Punkte aus T enthält.

Falls I ein linksseitiges Endintervall ist, folgt $t_1 \in \bar{I}$ und damit $z_1 \in I$, ein Widerspruch zu (4.9) und (4.10).

Andernfalls erhalten wir aus Definition 4.6, daß $r \geq n_p \geq r_p \geq 1$ (wobei x_p der linke Endpunkt des Intervalls I ist), d.h., \bar{I} enthält mindestens zwei Punkte aus T , etwa t_ν und $t_{\nu+1}$. Dies impliziert aber $z_{\nu+1} \in I$, ein Widerspruch zu (4.9) und (4.10). \diamond

Hermite-Interpolation ist eine Verallgemeinerung der Lagrange-Interpolation in dem Sinne, daß nicht nur Funktionswerte sondern auch noch Werte von bestimmten Ableitungen interpoliert werden können. Bei der Formulierung des Hermite-Interpolationsproblems in [8] werden statt der Ableitungen die dem erweiterten vollständigen Tschebyscheff-System (4.1) zugeordneten Differentialoperatoren L_i verwendet, die wie folgt definiert sind:

$$D_0 f := f \quad \text{und} \quad D_i f := D\left(\frac{f}{w_i}\right), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.11)$$

sowie

$$L_i := D_i D_{i-1} \dots D_0 \quad i = 0, \dots, m. \quad (4.12)$$

Nach Schumaker [12], (9.6) ist die Spezifikation der Differentialoperatoren $L_0 f(t)$, $L_1 f(t), \dots, L_r f(t)$ an einer Stelle t äquivalent zur Vorgabe der Ableitungen an dieser Stelle. Insbesondere besitzt eine Funktion $u \in \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$ im Fall

$$u(t) = L_1 u(t) = \dots = L_{z-1} u(t) = 0 \neq L_z u(t)$$

eine z -fache Nullstelle.

Wir formulieren nun das Hermite-Interpolationsproblem.

Definition 4.9 Seien \mathcal{S} ein n -dimensionaler VTS-Raum, $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ und z_1, \dots, z_n gegebene reelle Zahlen. Weiterhin gelte für alle $i = 1, \dots, n$:

$$\text{Aus } x_{j-1} \leq t_i < x_j \text{ folgt } d_i < n_{j-1}, \quad (4.13)$$

wobei

$$d_i := \max\{\nu; t_i = \dots = t_{i-\nu}\}. \quad (4.14)$$

Das Hermite-Interpolationsproblem besteht darin, eine Funktion $s \in \mathcal{S}$ zu finden mit

$$L_{d_i}^+ s(t_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Die Einschränkung (4.13) ist notwendig, da an $s|_{I_{j-1}}$ nicht mehr Bedingungen gestellt werden sollen als die Dimension des Raumes beträgt, aus dem dieses Teilstück des Splines kommt. Das Hermite-Interpolationsproblem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn für eine beliebige Basis s_1, \dots, s_n von \mathcal{S} die Determinante

$$D \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} := \det(L_{d_i}^+ s_j(t_i))_{i,j=1}^n \quad (4.16)$$

nicht verschwindet.

Im Folgenden definieren wir das erweiterte Hermite-Interpolationsproblem aus [8].

Definition 4.10 Seien \mathcal{S} ein n -dimensionaler VTS-Raum, z_1, \dots, z_n gegebene reelle Zahlen und $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ Punkte mit zugehörigen Vorzeichen $\theta_1, \dots, \theta_n \in \{-, +\}$. Für $i = 1, \dots, n$ setzen wir

$$\rho_i := \begin{cases} r_j, & \text{falls } t_i = x_j \text{ für ein } 1 \leq j \leq k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.17)$$

und

$$d_i := \begin{cases} \max\{\nu; t_i = \dots = t_{i-\nu} \text{ und } \theta_i = \dots = \theta_{i-\nu}\}, & \text{falls } \theta_i = +; \\ \rho_i + \max\{\nu; t_i = \dots = t_{i+\nu} \text{ und } \theta_i = \dots = \theta_{i+\nu}\}, & \text{falls } \theta_i = -. \end{cases} \quad (4.18)$$

Es gelten weiterhin die Einschränkungen:

$$\text{Aus } t_i \notin \Delta \cup \{x_{k+1}\} \text{ folgt } \theta_i = +. \quad (4.19)$$

$$\text{Aus } t_i = x_{k+1} \text{ folgt } \theta_i = -. \quad (4.20)$$

$$\text{Aus } x_{j-1} < t_i < x_j \text{ folgt } d_i < n_{j-1}. \quad (4.21)$$

$$\text{Aus } t_i = x_j \text{ folgt } d_i < \begin{cases} n_j, & \text{falls } \theta_i = +; \\ n_{j-1}, & \text{falls } \theta_i = -. \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\text{Aus } \theta_i = + \text{ und } \theta_{i+1} = - \text{ folgt } t_i < t_{i+1}. \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} &\text{Aus } \theta_i = - \text{ mit } t_i < x_{k+1} \text{ folgt die Existenz eines } j > i \\ &\text{mit } \theta_j = + \text{ und } t_i = t_j. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} &\text{Aus } \theta_i = - \text{ und } \theta_{i+1} = + \text{ folgt, daß für ein } j \text{ gilt} \\ &t_i = \dots = t_{i+r_j} = x_j \text{ und } \theta_{i+1} = \dots = \theta_{i+r_j} = +. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Das erweiterte Hermite-Interpolationsproblem besteht nun darin, eine Funktion $s \in \mathcal{S}$ zu finden mit

$$L_{d_i}^{\theta_i} s(t_i) = z_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

Die Idee bei dieser Verallgemeinerung des Hermite-Interpolationsproblems besteht darin, an den Knoten x_j neben den rechtsseitigen Ableitungen (bis zur Ordnung $n_j - 1$) auch noch linksseitige Ableitungen der Ordnung r_j und größer vorgeben zu können. Bedingung (4.19) besagt, daß nur an den Knoten x_j linksseitige Ableitungen spezifiziert werden können, und nach den Bedingungen (4.24) - (4.25) ist dies nur möglich, wenn die rechtsseitigen Ableitungen bis zur Ordnung $r_j - 1$ bereits festgelegt sind.

Die Bedingungen (4.21) - (4.22) entsprechen der Bedingung (4.13) des Hermite-Interpolationsproblems, d.h., es sollen an ein Teilstück des Splines nicht mehr Interpolationsbedingungen gestellt werden als die Dimension des entsprechenden Teilraumes beträgt. Wegen (4.20) kann man in b nur linksseitige Ableitungen vorgeben, und schließlich garantiert (4.23), daß die Punkte in einer natürlichen Ordnung sind.

Das verallgemeinerte Hermite-Interpolationsproblem (4.26) besitzt genau dann eine Lösung, wenn für eine beliebige Basis s_1, \dots, s_n von S die Determinante

$$D \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \\ \theta_1 & \dots & \theta_n \end{pmatrix} := \det((L_{d_i}^{\theta_i} s_j(t_i))_{i,j=1}^n) \quad (4.27)$$

nicht verschwindet.

Der folgende Interpolationssatz wurde in [8] bewiesen.

Satz 4.11 Für eine beliebige Basis s_1, \dots, s_n eines VTS-Raumes S und Punkte $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ mit den dazugehörigen Vorzeichen $\theta_1, \dots, \theta_n$, die (4.19) - (4.25) genügen, sind äquivalent:

(i)

$$D \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \\ \theta_1 & \dots & \theta_n \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.28)$$

(ii) Es gelten die folgenden drei Bedingungen :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha) \quad & t_{n-n_{i,k+1}} \leq x_i \leq t_{n_{0,i}+1} \text{ für alle } i = 1, \dots, k. \\ (\beta) \quad & \text{Gilt } x_i = t_{n_{0,i}+1}, \text{ so folgt } t_{n_{0,i}+1} = \dots = t_{n_{0,i}+1-r_i} \text{ und} \\ & \quad + = \theta_{n_{0,i}+1} = \dots = \theta_{n_{0,i}+1-r_i}. \\ (\gamma) \quad & \text{Gilt } t_{n-n_{i,k+1}} = x_i, \text{ so folgt } \theta_{n-n_{i,k+1}} = -. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Da die in Satz 4.11 auftretenden Dimensionen $n_{i,k+1}$ nicht bekannt sind (vgl. Beispiel 4.3), werden wir ein vergleichbares Resultat beweisen, bei denen diese Größen durch die bekannten Dimensionen $\hat{n}_{i,k+1}$ ersetzt werden.

Satz 4.12 Für eine beliebige Basis s_1, \dots, s_n eines VTS-Raumes \mathcal{S} und Punkte $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ mit den dazugehörigen Vorzeichen $\theta_1, \dots, \theta_n$, die (4.19) - (4.25) genügen, ist (4.28) äquivalent zu den folgenden drei Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad t_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} \leq x_i \leq t_{n_{0,i}+1} \text{ für alle } i = 1, \dots, k. \\ (\beta) \quad \text{Gilt } x_i = t_{n_{0,i}+1}, \text{ so folgt } t_{n_{0,i}+1} = \dots = t_{n_{0,i}+1-r_i} \text{ und} \\ \quad \quad \quad + = \theta_{n_{0,i}+1} = \dots = \theta_{n_{0,i}+1-r_i}. \\ (\gamma) \quad \text{Gilt } t_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} = x_i, \text{ so folgt } \theta_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} = -. \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

Beweis: (4.28) \Rightarrow (4.30): Wegen (4.6) gilt $n_{i,k+1} \leq \widehat{n}_{i,k+1}$, d.h., Satz 4.11 impliziert

$$t_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} \leq t_{n-n_{i,k+1}} \leq x_i,$$

also (α). (β) gilt wegen Satz 4.11. Falls $t_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} = x_i$, so folgt

$$x_i = t_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} \leq t_{n-n_{i,k+1}} \leq x_i$$

und damit nach Satz 4.11, daß $\theta_{n-n_{i,k+1}} = -$. Aus der Einschränkung (4.23) erhalten wir schließlich $\theta_{n-\widehat{n}_{i,k+1}} = -$, was den Beweis von (γ) beendet.

(4.30) \Rightarrow (4.28): Angenommen, es gibt einen nicht-trivialen Spline s mit

$$L_{d_i}^{\theta_i} s(t_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (4.31)$$

Sei $J = [x_i, x_j]$ ein maximales Teilintervall, so daß s auf keinem Teilintervall von J verschwindet und es kein t_ν in (x_i, x_j) gibt mit $\theta_\nu = -$. Gelte

$$\begin{aligned} x_i = t_{n_{0,i}+1} = \dots = t_{n_{0,i}+l} < t_{n_{0,i}+l+1} \leq \dots \leq t_{n-\widehat{n}_{j,k+1}-r} \\ < t_{n-\widehat{n}_{j,k+1}-r+1} = \dots = t_{n-\widehat{n}_{j,k+1}} = x_j \end{aligned} \quad (4.32)$$

für $l, r \geq 0$.

Wir definieren \bar{s} auf $[x_i, x_j]$ durch

$$\bar{s}(t) := \begin{cases} s(t), & \text{falls } t \in [x_i, x_j); \\ \lim_{x \rightarrow x_j^-} s(x), & \text{falls } t = x_j \end{cases}$$

und zählen die Nullstellen von \bar{s} in dem Raum $\widehat{\mathcal{S}}_{i,j}$. Zunächst zeigen wir:

$$\bar{s} \text{ besitzt in } x_i \text{ eine mindestens } r_i + l \text{-fache Nullstelle,} \quad (4.33)$$

wobei wir $r_0 = r_{k+1} := 0$ setzen.

Im Fall $i = 0$ gilt wegen (4.31) und (4.32)

$$L_\nu^+ s(x_i) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, l-1,$$

d.h., mit der Anmerkung vor Definition 4.9 folgt

$$D^\nu s(x_i) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, l-1,$$

also ist (4.33) im Fall $i = 0$ richtig.

Falls $i > 0$ und $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i]$, so folgt $D^\nu s(x_i) = 0$ für $\nu = 0, \dots, r_i - 1$.

Falls $i > 0$ und in x_i eine linksseitige Ableitung spezifiziert wurde, erhalten wir aus (4.31) und den Einschränkungen (4.24) - (4.25)

$$L_\nu^+ s(x_i) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, r_i - 1,$$

und es folgt wie oben $D^\nu s(x_i) = 0$ für $\nu = 0, \dots, r_i - 1$. Damit ist (4.33) im Fall $l = 0$ bewiesen. Gilt schließlich $l > 0$, so folgt wegen (β) und (4.31)

$$L_\nu^+ s(x_i) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, r_i + l - 1,$$

also haben wir auch in diesem Fall $D^\nu s(x_i) = 0$ für $\nu = 0, \dots, r_i + l - 1$. Dies beendet den Beweis von (4.33).

Analog beweist man:

$$\bar{s} \text{ besitzt in } x_j \text{ eine mindestens } r_j + r \text{-fache Nullstelle.} \quad (4.34)$$

Wegen (4.2), (4.5), (4.7) und (4.31) - (4.34) beträgt die Anzahl der Nullstellen von \bar{s} mindestens

$$(n - \hat{n}_{j,k+1} - r) - (n_{0,i} + l) + (r_i + l) + (r_j + r) = n_i + m_{i+1} + \dots + m_{j-1} = \hat{n}_{i,j} = \dim \hat{\mathcal{S}}_{i,j}.$$

Wegen $\bar{s} \neq 0$ ist dies ein Widerspruch zu Satz 4.7. \diamond

Als Korollar zu diesem Satz erhalten wir eine entsprechende Aussage über Lagrange-Interpolation.

Korollar 4.13 In einem n -dimensionalen VTS-Raum $S \subseteq C[a, b]$ für $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ äquivalent:

- (i) t_1, \dots, t_n sind poised.
- (ii) $t_{\widehat{n-\widehat{n}_1, k+1}} < x_i < t_{n_{0,i}+1}$ für $i = 1, \dots, k$.

Beweis: Wegen $S \subseteq C[a, b]$ gilt $r_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$, und die Behauptung folgt sofort aus Satz 4.12. \diamond

Als Folgerung unseres Resultats über Hermite-Interpolation können wir nun die Dimension der Teilräume $S|_{[x_i, x_{i+1})}$ eines VTS-Raumes S berechnen.

Satz 4.14 In einem VTS-Raum S gilt für alle $0 \leq i < j \leq k+1$ die Dimensionsformel

$$n_{i,j} = \min_{0 \leq l \leq i} \widehat{n}_{l,j}. \quad (4.35)$$

Insbesondere folgt $n_{l_0,j} = \widehat{n}_{l_0,j}$, falls das Minimum in l_0 angenommen wird.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

Jedes Element $s \in \widehat{S}_{l_0,j}$ läßt sich zu einer Funktion aus $\widehat{S}_{0,j}$ fortsetzen. (4.36)

Wir wenden im Fall $l_0 > 0$ (sonst ist nichts zu zeigen) Satz 4.12 auf den Raum \widehat{S}_{0,l_0} an. Wegen der Minimalität von l_0 folgt $\widehat{n}_{l_0,j} \leq \widehat{n}_{l_0-1,j}$ und damit

$$r_{l_0} \leq n_{l_0-1} = \widehat{n}_{l_0-1,l_0},$$

d.h., es gilt

$$n_{0,l_0} - \widehat{n}_{l_0-1,l_0} < n_{0,l_0} - r_{l_0} + 1.$$

Wegen $\dim \widehat{S}_{0,l_0} = n_{0,l_0}$ erhalten wir hieraus mit Satz 4.12 ein $s_0 \in \widehat{S}_{0,l_0}$ durch Interpolation an

$$t_{n_{0,l_0}-r_{l_0}+1} = \dots = t_{n_{0,l_0}} = x_{l_0}$$

mit

$$\theta_{n_{0,l_0}-r_{l_0}+1} = \dots = \theta_{n_{0,l_0}} = -$$

und

$$L_{d_\nu}^- s_0(t_\nu) = L_{d_\nu}^+ s(t_\nu)$$

für $\nu = n_{0,l_0} - r_{l_0} + 1, \dots, n_{0,l_0}$. Nach der Anmerkung vor Definition 4.9 folgt

$$D_-^\nu s_0(x_{l_0}) = D_+^\nu s(x_{l_0}) \quad \text{für } \nu = 0, \dots, r_{l_0} - 1,$$

d.h., s_0 setzt s nach (a, x_{l_0}) fort. Damit ist (4.36) bewiesen.

Aus der Minimalität von $\hat{n}_{l_0,j}$ folgt

$$\hat{n}_{l_0,j} - \hat{n}_{i,j} \leq 0.$$

Also kann man nach Satz 4.12 im Raum $\hat{\mathcal{S}}_{l_0,j}$ mit $\hat{n}_{l_0,j}$ Punkten, die größer als x_i sind, interpolieren und erhält damit in der offensichtlichen Weise $m := \hat{n}_{l_0,j}$ Funktionen s_1, \dots, s_m aus $\hat{\mathcal{S}}_{l_0,j}$, so daß

$$\{s_1|_{[x_i, x_j]}, \dots, s_m|_{[x_i, x_j]}\}$$

linear unabhängig ist.

Nach (4.36) sind diese Funktionen zu Funktionen $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m$ aus $\hat{\mathcal{S}}_{0,j}$ fortsetzbar. Aus $r_l \leq n_l$ für alle $l = j, \dots, k$ folgt bekannterweise (siehe etwa Schumaker [12], §11) für alle $\nu = 1, \dots, m$ die Fortsetzbarkeit von $\tilde{s}_\nu|_{[a, x_j]}$ zu einer Funktion aus \mathcal{S} , also insgesamt $n_{i,j} \geq \hat{n}_{l_0,j}$.

Da jedoch die Ungleichung $n_{i,j} \leq n_{l_0,j} \leq \hat{n}_{l_0,j}$ klar ist, erhalten wir schließlich

$$n_{i,j} = n_{l_0,j} = \hat{n}_{l_0,j}. \quad \diamond$$

Bemerkung 4.15 Liegt eine Situation wie in vorangegangenen Beweis vor, so kann man eine "einseitige" Basis von $\hat{\mathcal{S}}_{l_0,j}$ wie in Schumaker [12], §11.2 konstruieren. Wegen der Dimensionsformel (4.35) erhält man durch Einschränkung der Basiselemente auf $[x_i, x_j]$ (bzw. $[x_i, x_{k+1}]$ im Fall $j = k+1$) eine Basis des Raumes $\mathcal{S}|_{[x_i, x_j]}$ (bzw. $\mathcal{S}|_{[x_i, x_{k+1}]}$ im Fall $j = k+1$) und damit die lineare Unabhängigkeit dieser Elemente, was je nach Wahl des Raumes \mathcal{S} nicht immer offensichtlich ist.

Wählen wir z.B. $k = 2$, $n_0 = 1$, $n_1 = n_2 = 4$ und $r_1 = r_2 = 3$, so folgt

$$\dim \mathcal{S} = 3 = \min_{0 \leq l \leq 2} \hat{n}_{l,3} = n_{2,3}.$$

Also sind die Funktionen s_1 , s_2 und s_3 gegeben durch

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= w_1(x), \\ s_2(x) &:= w_1(x) \int_{x_1}^x w_2(s_2) \int_{x_1}^{s_2} w_3(s_3) \int_{x_1}^{s_3} w_4(s_4) ds_4 \dots ds_2 \end{aligned}$$

und

$$s_3(x) := w_1(x) \int_{x_2}^x w_2(s_2) \int_{x_2}^{s_2} w_3(s_3) \int_{x_2}^{s_3} w_4(s_4) ds_4 \dots ds_2$$

linear unabhängig auf $[x_2, x_3]$.

Das folgende Resultat besagt insbesondere, daß es auch in einem VTS-Raum \mathcal{S} zu einer vorgegebenen Funktion $f \in C[a, b]$ ein Knotenintervall gibt, auf dem alle besten Approximationen von f aus \mathcal{S} übereinstimmen.

Lemma 4.16 *In einem VTS-Raum $\mathcal{S} \subseteq C[a, b]$ gilt die Aussage von Lemma 3.14.*

Beweis: Wir modifizieren den Beweis von Lemma 3.14 wie folgt. Das Intervall $[x_i, x_j]$ wird nun so gewählt, daß

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq \hat{n}_{i,j} + 1$$

und

$$A(f - s_f) |_{[x_p, x_q]} \leq \hat{n}_{p,q}$$

für jedes echte Teilintervall $[x_p, x_q] \subseteq [x_i, x_j]$.

Nach Korollar 4.8 ist $\hat{\mathcal{S}}_{i,j} \subseteq C[x_i, x_j]$ als VTS-Raum schwach tschebyscheff, und wegen Satz 4.12 können wir weiter schließen wie im Beweis von Lemma 3.14. \diamond

Wir formulieren nun das Hauptresultat dieses Abschnitts, das für polynomiale Splines bereits in Berens & Nürnberger [2] enthalten ist.

Satz 4.17 Seien ein VTS-Raum $S \subseteq C[a, b]$ und $f \in C[a, b] \setminus S$ gegeben. Die Menge der Punkte, auf der alle besten Approximationen von f aus S übereinstimmen, ist die Vereinigung von Knotenintervallen.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

Lemma 4.18 Seien $S \subseteq C[a, b]$ ein VTS-Raum und $s \in S$.

- (i) Falls $0 < i < k + 1$, $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i]$ und ein $t \in [x_i, x_{i+1}]$ mit $s(t) \neq 0$ existiert, so folgt $n_i > r_i$.
- (ii) Falls $0 < j < k + 1$, $s = 0$ auf $[x_j, x_{j+1}]$ und ein $t \in [x_{j-1}, x_j]$ mit $s(t) \neq 0$ existiert, so folgen $n_{j,k+1} = \hat{n}_{j,k+1}$ und $\hat{n}_{l,j} > r_j$ für alle $0 \leq l < j$.
- (iii) Falls $0 < i < j < k + 1$, $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_j, x_{j+1}]$ und ein $t \in [x_{j-1}, x_j]$ mit $s(t) \neq 0$ existiert, so folgt $m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0$.

Beweis: (i) ist klar. (ii): Wir wenden Satz 4.7 auf den Raum $\hat{S}_{l,j+1}$ an. s besitzt höchstens $\hat{n}_{l,j+1} - 1$ Nullstellen, wobei das Intervall $(x_j, x_{j+1}]$ mit n_j gezählt wird. Daraus folgt

$$n_j \leq \hat{n}_{l,j+1} - 1,$$

d.h. $\hat{n}_{l,j} > r_j$ für alle $0 \leq l < j$. Dies impliziert wegen

$$\hat{n}_{l,k+1} = (\hat{n}_{l,j} - r_j) + \hat{n}_{j,k+1}$$

und Satz 4.14, daß

$$n_{j,k+1} = \hat{n}_{j,k+1},$$

also (ii). (iii): Wir zählen die Nullstellen von s im Raum $\hat{S}_{i-1,j+1}$. Das Intervall $(x_j, x_{j+1}]$ wird mit n_j gezählt, und ist l maximal gewählt mit $s = 0$ auf $[x_{i-1}, x_l]$, so zählen wir das Intervall $[x_{i-1}, x_l]$ mit $\hat{n}_{i-1,l}$. Wegen $n_\nu \geq r_\nu$ für alle $\nu = 1, \dots, k$ erhalten wir hieraus und aus Satz 4.7

$$n_{i-1} + n_j \leq \hat{n}_{i-1,l} + n_j \leq \hat{n}_{i-1,j+1} - 1,$$

d.h. $m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0$. \diamond

Die Rolle der sogenannten abgebrochenen Potenzen in polynomialen Splineräumen wird in verallgemeinerten tschebyscheffschen Splineräumen im wesentlichen von den dem erweiterten vollständigen Tschebyscheff-System (4.1) zugeordneten *Greenschen Funktionen* übernommen, die wir nun definieren werden. Für $1 \leq j \leq m$ seien

$$g_j(x; y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < y; \\ w_1(x) \int_y^x w_2(s_2) \int_y^{s_2} \dots \int_y^{s_{j-1}} w_j(s_j) ds_j \dots ds_2, & \text{falls } x \geq y \end{cases} \quad (4.37)$$

und

$$\tilde{g}_j(x; y) := \begin{cases} w_1(x) \int_x^y w_2(s_2) \int_{s_2}^y \dots \int_{s_{j-1}}^y w_j(s_j) ds_j \dots ds_2, & \text{falls } x < y; \\ 0, & \text{falls } x \geq y. \end{cases} \quad (4.38)$$

Mit Hilfe dieser Greenschen Funktionen kann man eine "lokale" Basis der Räume $S_{0,i}^0$ und $S_{i,k+1}^0$ erhalten (vgl. [12], §9.3 und [12], §11.2).

Lemma 4.19 In einem VTS-Raum \mathcal{S} gelten für $0 < i < k+1$

$$S_{0,i}^0|_{[a, x_{i+1}]} = \text{span}\{g_{r_i+1}(\cdot; x_i), \dots, g_{n_i}(\cdot; x_i)\} \quad (4.39)$$

und

$$S_{i,k+1}^0|_{[x_{i-1}, b]} = \text{span}\{\tilde{g}_{r_i+1}(\cdot; x_i), \dots, \tilde{g}_{n_i-1}(\cdot; x_i)\}. \quad (4.40)$$

Wie im Beweis von [9], Satz 3.3 gezeigt wurde, sind die Greenschen Funktionen in gewisser Weise geordnet.

Lemma 4.20 Seien $0 \leq r_i \leq n_i$ und $g_{r_i+1}(\cdot; x_i), \dots, g_{n_i}(\cdot; x_i)$ die in (4.37) definierten Greenschen Funktionen. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_i+} \frac{g_l(x; x_i)}{g_{r_i+1}(x; x_i)} = 0, \quad l = r_i + 2, \dots, n_i. \quad (4.41)$$

Die analoge Aussage gilt für die in (4.38) definierten Funktionen \tilde{g}_l , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_i-} \frac{\tilde{g}_l(x; x_i)}{\tilde{g}_{r_i+1}(x; x_i)} = 0, \quad l = r_i + 2, \dots, n_i - 1. \quad (4.42)$$

Das nun folgende Resultat überträgt Lemma 3.13, (i) auf eine speziellere Situation.

Lemma 4.21 Seien $S \subseteq C[a, b]$ ein VTS-Raum, $f \in C[a, b] \setminus S$, s_f beste Approximation von f aus S und $s \in S$. Gelte weiterhin $0 < i < k+1$ (bzw. $0 < j < k+1$), $s = s_f$ auf $[x_{i-1}, x_i]$ (bzw. $[x_j, x_{j+1}]$), $x_i \in E(f - s_f)$ (bzw. $x_j \in E(f - s_f)$), sei $f - s_f$ in x_i flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} (bzw. in x_j flach von links bzgl. \tilde{g}_{r_j+1}), und es gebe ein $\epsilon > 0$ mit

$$(f(t) - s_f(t))(s(t) - s_f(t)) < 0 \quad (4.43)$$

für alle $x_i < t < x_i + \epsilon$ (bzw. $x_j - \epsilon < t < x_j$). Dann existiert ein $\tilde{t} \in (x_i, x_i + \epsilon)$ (bzw. $\tilde{t} \in (x_j - \epsilon, x_j)$) mit

$$|f(\tilde{t}) - s(\tilde{t})| > \|f - s_f\|.$$

Insbesondere ist s nicht beste Approximation von f aus S .

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz eines $\tilde{t} \in (x_i, x_i + \epsilon)$ mit der gewünschten Eigenschaft. Aus (4.43) und Lemma 4.18, (i) folgt $n_i > r_i$, d.h., wir erhalten wegen $s - s_f = 0$ auf $[x_{i-1}, x_i]$ und Lemma 4.19 eine Darstellung

$$s(t) - s_f(t) = \alpha_{r_i+1} g_{r_i+1}(t; x_i) + \dots + \alpha_{n_i} g_{n_i}(t; x_i) \quad (4.44)$$

für alle $t \in [x_i, x_{i+1}]$. Wegen Lemma 4.20 gibt es ein $\epsilon_1 > 0$ mit

$$|\alpha_{r_i+2} g_{r_i+2}(t; x_i) + \dots + \alpha_{n_i} g_{n_i}(t; x_i)| \leq \left| \frac{\alpha_{r_i+1}}{2} g_{r_i+1}(t; x_i) \right| \quad (4.45)$$

für alle $x_i < t < x_i + \epsilon_1$. Gelte o.B.d.A. $\epsilon_1 \leq \min\{\epsilon, x_{i+1} - x_i\}$. Da $f - s_f$ in x_i flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} ist, gibt es ein $\tilde{t} \in (x_i, x_i + \epsilon_1)$ mit

$$|(f(x_i) - s_f(x_i)) - (f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))| < \left| \frac{\alpha_{r_i+1}}{2} g_{r_i+1}(\tilde{t}; x_i) \right|. \quad (4.46)$$

Nun folgt aus (4.43) - (4.46)

$$\begin{aligned} |f(\tilde{t}) - s(\tilde{t})| &= |(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) - (s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))| \\ &= |f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| + |s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| \\ &= |f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| + |\alpha_{r_i+1} g_{r_i+1}(\tilde{t}; x_i) + \dots + \alpha_{n_i} g_{n_i}(\tilde{t}; x_i)| \\ &\geq |f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})| + \left| \frac{\alpha_{r_i+1}}{2} g_{r_i+1}(\tilde{t}; x_i) \right| \\ &> |f(x_i) - s_f(x_i)| \\ &= \|f - s_f\|. \end{aligned}$$

Die Existenz eines $\tilde{t} \in (x_j - \epsilon, x_j)$ zeigt man analog unter Verwendung von Lemma 4.18, (ii). \diamond

Bezeichnung 4.22 Für einen VTS-Raum $S \subseteq C[a, b]$ und $f \in C[a, b] \setminus S$ nennen wir ein Intervall I ein *Eindeutigkeitsintervall* bzgl. f , falls alle besten Approximationen von f aus S auf I identisch sind.

Wir geben nun hinreichende Bedingungen für ein Eindeutigkeitsintervall in VTS-Räumen an.

Lemma 4.23 Seien $S \subseteq C[a, b]$ ein VTS-Raum, $f \in C[a, b] \setminus S$ und s_f eine beste Approximation von f aus S . Das Intervall $[x_i, x_j]$ enthält ein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es gilt:

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_j]} \geq \hat{n}_{i,j} + 1.$$

(ii) Es gelten $i > 0$, $[x_{i-1}, x_i]$ ist Eindeutigkeitsintervall bzgl. f und

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} \geq m_i + \dots + m_{j-1} + 1$$

für ein $i < j \leq k + 1$.

(iii) Es gelten $j < k + 1$, $[x_j, x_{j+1}]$ ist Eindeutigkeitsintervall bzgl. f und

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_j]} \geq \tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1$$

für ein $0 \leq i < j$.

(iv) Es gelten $0 < i < j < k + 1$, $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ sind Eindeutigkeitsintervalle bzgl. f und

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1.$$

(v) Es gelten $i > 0$, $[x_{i-1}, x_i]$ ist Eindeutigkeitsintervall bzgl. f , $f - s_f$ ist in x_i flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} und

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} + 1$$

für ein $i < j \leq k + 1$.

- (vi) Es gelten $j < k + 1$, $[x_j, x_{j+1}]$ ist Eindeutigkeitsintervall bzgl. f , $f - s_f$ ist in x_j flach von links bzgl. \tilde{g}_{r_j+1} und

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq \tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1$$

für ein $0 \leq i < j$.

- (vii) Es gelten $0 < i < j < k + 1$, $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ sind Eindeutigkeitsintervalle bzgl. f , $f - s_f$ ist in x_i flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} und

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1.$$

- (viii) Es gelten $0 < i < j < k + 1$, $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ sind Eindeutigkeitsintervalle bzgl. f , $f - s_f$ ist in x_j flach von links bzgl. \tilde{g}_{r_j+1} und

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1.$$

Beweis: (i) folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 4.16.

Ist s beste Approximation von f , so folgt

$$(f(t) - s_f(t))(s(t) - s_f(t)) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in E(f - s_f) \quad (4.47)$$

(sonst gilt $|f(t) - s(t)| = |(f(t) - s_f(t)) - (s(t) - s_f(t))| = |f(t) - s_f(t)| + |s(t) - s_f(t)| > |f(t) - s_f(t)| = \|f - s_f\| = \|f - s\|$, ein Widerspruch).

(ii): Wir wählen n_{i-1} beliebige Punkte aus $[x_{i-1}, x_i]$ und bezeichnen diese Menge mit T_1 . Sei $T_2 \subseteq (x_i, x_j]$ eine Menge alternierender Extrempunkte von $f - s_f$ der Kardinalität $m_i + \dots + m_{j-1} + 1$. Dann folgt $|T_1 \cup T_2| = \hat{n}_{i-1,j} + 1$. Wir wählen ein Teilintervall $[x_p, x_q]$ von $[x_{i-1}, x_j]$ mit

$$|(T_1 \cup T_2) \cap [x_p, x_q]| \geq \hat{n}_{p,q} + 1 \quad \text{und} \quad |(T_1 \cup T_2) \cap [x_l, x_m]| \leq \hat{n}_{l,m} \quad (4.48)$$

für jedes echte Teilintervall $[x_l, x_m] \subseteq [x_p, x_q]$. Wegen $|T_1| = n_{i-1}$ gilt $[x_p, x_q] \neq [x_{i-1}, x_i]$.

Mit der inzwischen vertrauten Schlußweise erhalten wir aus (4.47), (4.48), Korollar 4.8, Korollar 4.13 und Lemma 3.4, daß $[x_p, x_q]$ ein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f ist.

(iii): Falls $[x_{j-1}, x_j]$ kein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f ist, folgt aus Lemma 4.18, (ii), daß $\hat{n}_{i,j} > r_j$, d.h. $\tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} > 0$, und wir können weiter schließen wie in (ii).

(iv): Falls $[x_{j-1}, x_j]$ kein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f ist, wählen wir n_{i-1} bzw. n_j beliebige Punkte aus $[x_{i-1}, x_i]$ bzw. $[x_j, x_{j+1}]$ und fahren fort wie in (ii).

(v): Falls $A(f - s_f)|_{(x_i, x_j]} \geq m_i + \dots + m_{j-1} + 1$, ist wegen (ii) nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es nach Lemma 4.21 für alle besten Approximationen s von f und alle $\epsilon > 0$ ein \tilde{t} mit $x_i < \tilde{t} < x_i + \epsilon$ und

$$(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t}))(s(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) \geq 0.$$

Gelte o.B.d.A. $\tilde{t} < x_{i+1}$ und $\tilde{t} < t$ für alle $t \in E(f - s_f) \cap (x_i, x_j]$. Ferner sei \tilde{t} so nahe bei x_i gewählt, daß $(f(x_i) - s_f(x_i))(f(\tilde{t}) - s_f(\tilde{t})) \geq 0$. Fügen wir \tilde{t} der Menge T_2 aus dem Beweis von (ii) (die hier nur die Kardinalität $m_i + \dots + m_{j-1}$ besitzt) hinzu, so erhalten wir wie im Beweis von (ii) ein von der Wahl von s unabhängiges Teilintervall $[x_p, x_q]$ mit $s = s_f$ auf $[x_p, x_q]$, also ein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f .

(vi) - (viii) beweist man analog zu (v). \diamond

Das nun folgende Lemma enthält einen wesentlichen Teil des Beweises von Satz 4.17.

Lemma 4.24 Seien $S \subseteq C[a, b]$ ein VTS-Raum, $s_f \in S$ beste Approximation von $f \in C[a, b] \setminus S$ und $T \subseteq E(f - s_f)$. Weiterhin gelten $0 < i < j < k + 1$,

$$m_i > 0, \quad (4.49)$$

$$\tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} > 0 \quad \text{für alle } i < l < j, \quad (4.50)$$

$$m_i + \dots + m_{j-1} - r_j > 0, \quad (4.51)$$

und

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_j] \cap T} \leq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j, \quad (4.52)$$

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_l] \cap T} \leq m_i + \dots + m_{l-1} \quad \text{für alle } i < l < j, \quad (4.53)$$

$$A(f - s_f)|_{[x_l, x_j] \cap T} \leq \tilde{m}_l + \dots + \tilde{m}_{j-1} \quad \text{für alle } i < l < j, \quad (4.54)$$

$$A(f - s_f)|_{[x_p, x_q] \cap T} \leq \hat{n}_{p,q} \quad \text{für alle } i < p < q < j. \quad (4.55)$$

Dann existiert ein $s \in \mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(f(t) - s_f(t))s(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in T \cap (x_i, x_j). \quad (4.56)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } x_i \in T \text{ (bzw. } x_j \in T) \text{ gilt, existiert ein } \epsilon > 0 \text{ mit} \\ (f(t) - s_f(t))s(t) > 0 \text{ für alle } t \in (x_i, x_i + \epsilon) \text{ (bzw. } t \in (x_j - \epsilon, x_j)). \end{array} \right\} \quad (4.57)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } (x_i, x_j) \text{ besitzt } s \text{ nur endlich viele Nullstellen, und diese können so} \\ \text{gewählt werden, daß } s(x) \neq 0 \text{ für ein fest vorgegebenes } x \in (x_i, x_j). \end{array} \right\} \quad (4.58)$$

In Fall $i = 0$ bzw. $j = k + 1$ gelten die entsprechenden Analoga; falls etwa $j = k + 1$ gilt, so folgt aus (4.49), (4.53) für alle $i < l \leq k + 1$ und (4.55) für alle $i < p < q \leq k + 1$ die Existenz eines $s \in \mathcal{S}_{0,i}^0$ mit (4.56) für alle $t \in T \cap (x_i, b]$, (4.57) und (4.58) für $(x_i, b]$.

Beweis: Wir zeigen den Fall $0 < i < j < k + 1$. Setzen wir

$$\mu := A(f - s_f) |_{[x_i, x_j] \cap T},$$

so existieren eindeutig bestimmte Mengen T_1, \dots, T_μ mit

$$T \cap [x_i, x_j] = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} T_\nu$$

und $t_\nu < t_{\nu+1}$, $\text{sgn}(f(t_\nu) - s_f(t_\nu)) = -\text{sgn}(f(t_{\nu+1}) - s_f(t_{\nu+1}))$ für alle $t_\nu \in T_\nu$, $t_{\nu+1} \in T_{\nu+1}$ und $\nu = 1, \dots, \mu - 1$. Weiterhin definieren wir $\underline{t}_\nu := \min\{t; t \in T_\nu\}$ und $\bar{t}_\nu := \max\{t; t \in T_\nu\}$ für alle $\nu = 1, \dots, \mu$.

Fall 1: $\mu = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j$.

Für $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ setzen wir

$$q_\nu := \max\{q; q > i \text{ und } m_i + \dots + m_{q-1} \leq \nu\} \quad (4.59)$$

und

$$p_\nu := \min\{p; p < j \text{ und } \tilde{m}_p + \dots + \tilde{m}_{j-1} \leq \mu - \nu\}, \quad (4.60)$$

wobei $\max \emptyset := i$ und $\min \emptyset := j$. Wir zeigen zunächst:

$$x_{q_\nu} < \underline{t}_{\nu+1}, \quad (4.61)$$

$$\bar{t}_\nu < x_{p_\nu}, \quad (4.62)$$

$$q_\nu < p_\nu \quad (4.63)$$

für alle $\nu = 1, \dots, \mu - 1$.

Aus (4.59) erhalten wir $m_i + \dots + m_{q_\nu-1} \leq \nu$, und damit enthält $[x_i, x_{q_\nu}]$ nach (4.53) höchstens ν alternierende Extrempunkte von $f - s_f$ aus T , d.h. $x_{q_\nu} < \underline{t}_{\nu+1}$. Analog folgt nach (4.54) und (4.60), daß $[x_{p_\nu}, x_j]$ höchstens $\tilde{m}_{p_\nu} + \dots + \tilde{m}_{j-1} \leq \mu - \nu$ alternierende Extrempunkte von $f - s_f$ aus T besitzt, also $\bar{t}_\nu < x_{p_\nu}$.

Wegen $m_i + \dots + m_{j-1} = \mu + r_j > \mu > \nu$ für alle $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ gilt $q_\nu < j$ für alle ν , und analog haben wir wegen $\tilde{m}_i + \dots + \tilde{m}_{j-1} = \mu + r_i > \mu > \mu - \nu$, daß $i < p_\nu$ für alle ν . Also ist (4.63) in den Fällen $q_\nu = i$ und $p_\nu = j$ bewiesen. Andernfalls folgt

$$\begin{aligned} m_i + \dots + m_{q_\nu-1} + r_{p_\nu} + m_{p_\nu} + \dots + m_{j-1} - r_j \\ = m_i + \dots + m_{q_\nu-1} + \tilde{m}_{p_\nu} + \dots + \tilde{m}_{j-1} \leq \nu + \mu - \nu = \mu, \end{aligned}$$

woraus wir im Fall $p_\nu \leq q_\nu$ schließen, daß

$$r_{p_\nu} + m_{p_\nu} + \dots + m_{q_\nu-1} \leq 0,$$

ein Widerspruch. Dies beendet den Beweis von (4.61) - (4.63).

Daher können wir nun für alle $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ ein z_ν wählen mit

$$\max\{\bar{t}_\nu, x_{q_\nu}\} < z_\nu < \min\{\underline{t}_{\nu+1}, x_{p_\nu}\} \quad (4.64)$$

und $x \notin M_1 := \{z_1, \dots, z_{\mu-1}\}$ für ein fest vorgegebenes $x \in (x_i, x_j)$. Wir wählen nun beliebige Mengen M_2 bzw. M_3 von $n_{0,i}$ bzw. $\hat{n}_{j,k+1}$ Punkten, die poised sind bzgl. $\hat{S}_{0,i}$ bzw. $\hat{S}_{j,k+1}$ und behaupten:

$$\text{Für jedes } z \in (x_i, x_j) \setminus M_1 \text{ ist } M_z := \{z\} \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \text{ poised bzgl. } S. \quad (4.65)$$

Nach Korollar 4.13 genügt es dazu zu zeigen:

$$\text{Jedes Intervall } [a, x_\nu] \text{ enthält höchstens } n_{0,\nu} \text{ Punkte aus } M_z, \quad (4.66)$$

und

$$\text{jedes Intervall } [x_\nu, b] \text{ enthält höchstens } \hat{n}_{\nu,k+1} \text{ Punkte aus } M_z. \quad (4.67)$$

Gilt $\nu \leq i$ oder $\nu \geq j$, so ist (4.66) nach (4.51) und der Wahl von M_2 und M_3 klar.

Im Fall $i < \nu < j$ haben wir zu zeigen, daß $m_i + \dots + m_{\nu-1} \geq 1$ und

$$|M_1 \cap (x_i, x_\nu)| \leq m_i + \dots + m_{\nu-1} - 1. \quad (4.68)$$

Die erste Behauptung ist wegen (4.49) klar. Setzen wir $m := m_i + \dots + m_{\nu-1}$, so folgt aus (4.59), daß $\nu \leq q_m$ (denn $m_i + \dots + m_{\nu-1} \leq m$, und q_m ist das Maximum der Indizes mit dieser Eigenschaft), also $x_\nu \leq x_{q_m} < z_m$, und damit folgen (4.68) und (4.66).

Wegen (4.50) ist im Beweis von (4.67) wieder nur der Fall $i < \nu < j$ von Interesse. Setzen wir $m := \tilde{m}_\nu + \dots + \tilde{m}_{j-1}$, so gilt nach (4.60), daß $p_{\mu-m} \leq \nu$, und damit folgt $z_{\mu-m} < x_\nu$ aus (4.64). Also enthält $[x_\nu, x_j]$ höchstens $(\mu - 1) - (\mu - m) = m - 1$ Punkte aus M_1 , d.h. (4.67). Dies beendet den Beweis von (4.65).

Wir fixieren nun ein $\tilde{t} \in (x_i, z_1)$ (bzw. $\tilde{t} \in (x_i, x_j)$ im Extremfall $\mu = 1$) und bezeichnen mit s den nach (4.65) eindeutig bestimmten Spline aus \mathcal{S} mit

$$s(t) = 0 \text{ für alle } t \in M_1 \cup M_2 \cup M_3 \text{ und } s(\tilde{t}) = \text{sgn}(f(\underline{t}_1) - s_f(\underline{t}_1)). \quad (4.69)$$

Gemäß der Wahl von M_2 und M_3 folgt $s \in \mathcal{S}_{0,i}^0 \cap \mathcal{S}_{j,k+1}^0$. Da s nicht trivial ist, erhalten wir aus (4.65) und (4.69), daß s in (x_i, x_j) nur die Elemente von M_1 als Nullstellen besitzt. Zählen wir nun die Nullstellen wie in Definition 4.6, so folgt aus Satz 4.7, daß jede Nullstelle aus M_1 eine einfache Nullstelle ist, also nach Definition 4.6 einen Vorzeichenwechsel besitzt. Damit genügt s den Bedingungen (4.56) - (4.58), und der Beweis von Fall 1 ist beendet.

Fall 2: $0 < \mu < m_i + \dots + m_{j-1} - r_j$.

Wir führen diesen Fall auf Fall 1 zurück, indem wir einen VTS-Raum $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$ konstruieren, der den Voraussetzungen von Fall 1 genügt. Seien dazu

$$a_p^* := \max\{1, \max\{\nu; \underline{t}_\nu \leq x_{p+1}\}\} \quad \text{für } i \leq p < j-1 \quad (4.70)$$

und

$$a_{j-1}^* := \mu + r_j. \quad (4.71)$$

Wir definieren nun rekursiv für alle $i \leq p \leq j-1$

$$n_p^* := \max_{p \leq \nu \leq j-1} \{a_\nu^* - (m_{p+1} + \dots + m_\nu)\} - (m_i^* + \dots + m_{p-1}^*) + r_p, \quad (4.72)$$

wobei $m_l^* := n_l^* - r_l$ für alle $l = i, \dots, p-1$.

Wir behaupten, daß $S^* := S(\mathcal{U}, \mathcal{N}^*, \mathcal{R}, \Delta)$ mit

$$\mathcal{N}^* := (n_0, \dots, n_{i-1}, n_i^*, \dots, n_{j-1}^*, n_j, \dots, n_k)$$

ein VTS-Raum ist, der $S^* \subseteq S$ erfüllt und den Voraussetzungen von Fall 1 genügt. Dazu sind zu zeigen:

$$n_i^* > r_i \quad (\text{d.h. } m_i^* > 0), \quad (4.73)$$

$$n_p^* \geq r_p \quad \text{für alle } p = i+1, \dots, j-1, \quad (4.74)$$

$$n_p^* \leq n_p \quad \text{für alle } p = i, \dots, j-1, \quad (4.75)$$

$$m_i^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j = \mu, \quad (4.76)$$

$$\tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^* > 0 \quad \text{für alle } i < l < j \quad (\text{wobei } \tilde{m}_l^* := n_l^* - r_{l+1}), \quad (4.77)$$

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_l] \cap T} \leq m_i^* + \dots + m_{l-1}^* \quad \text{für alle } i < l < j, \quad (4.78)$$

$$A(f - s_f) |_{[x_l, x_j] \cap T} \leq \tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^* \quad \text{für alle } i < l < j \quad (4.79)$$

und

$$A(f - s_f) |_{[x_p, x_q] \cap T} \leq n_p^* + m_{p+1}^* + \dots + m_{q-1}^* \quad \text{für alle } i < p < q < j. \quad (4.80)$$

Nach (4.70) gilt $a_i^* \geq 1$, also folgt aus (4.72), daß $n_i^* \geq 1 + r_i > r_i$, d.h. (4.73).

Wir zeigen nun (4.74). Aus (4.72) folgt

$$n_{p-1}^* = a_\nu^* - (m_p + \dots + m_\nu) - (m_i^* + \dots + m_{p-2}^*) + r_{p-1}$$

für ein $\nu \geq p-1$. Im Fall $\nu \geq p$ erhalten wir hieraus wegen $m_p \geq 0$

$$0 = a_\nu^* - (m_p + \dots + m_\nu) - (m_i^* + \dots + m_{p-1}^*) \leq a_\nu^* - (m_{p+1} + \dots + m_\nu) - (m_i^* + \dots + m_{p-1}^*)$$

und damit $n_p^* \geq r_p$. Andernfalls gilt $\nu = p-1$, also

$$a_{p-1}^* = m_i^* + \dots + m_{p-1}^*,$$

und wegen $a_p^* \geq a_{p-1}^*$ folgt

$$a_p^* - (m_i^* + \dots + m_{p-1}^*) \geq 0,$$

d.h. $n_p^* \geq r_p$. Damit ist (4.74) gezeigt.

Wir zeigen (4.75) zunächst für $p = i$. Nach (4.72) folgt

$$m_i^* = a_\nu^* - (m_{i+1} + \dots + m_\nu)$$

für ein $\nu \geq i$. Wegen (4.49) und (4.53) folgt auch $m_i + \dots + m_\nu \geq a_\nu^*$, und somit erhalten wir insgesamt $m_i \geq m_i^*$, d.h. $n_i \geq n_i^*$. Falls $p > i$, gilt nach (4.72)

$$m_p^* = a_\nu^* - (m_{p+1} + \dots + m_\nu) - (m_i^* + \dots + m_{p-1}^*) \quad (4.81)$$

für ein $\nu \geq p$ und für dieses ν

$$m_{p-1}^* \geq a_\nu^* - (m_p + \dots + m_\nu) - (m_i^* + \dots + m_{p-2}^*). \quad (4.82)$$

Aus (4.81) und (4.82) folgt auch in diesem Fall $m_p \geq m_p^*$, d.h. $n_p \geq n_p^*$.

Wegen (4.71) und (4.72) gilt

$$m_i^* + \dots + m_{j-1}^* = a_{j-1}^* = \mu + r_j,$$

also (4.76). Wir zeigen nun (4.77). Nach (4.72) gilt

$$m_i^* + \dots + m_{l-1}^* = a_\nu^* - (m_l + \dots + m_\nu)$$

für ein $l-1 \leq \nu \leq j-1$. Im Fall $\nu \leq j-2$ erhalten wir hieraus

$$m_i^* + \dots + m_{l-1}^* \leq a_\nu^* \leq \mu,$$

d.h., mit (4.76) folgt

$$m_l^* + \dots + m_{j-1}^* \geq r_j,$$

also

$$\tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^* = r_l + m_l^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j \geq r_l > 0.$$

(Gilt $\nu = j-1$, so folgt

$$m_i^* + \dots + m_{l-1}^* = \mu + r_j - (m_l + \dots + m_{j-1}),$$

d.h., mit (4.76) gilt

$$m_l^* + \dots + m_{j-1}^* = m_l + \dots + m_{j-1},$$

und damit folgt nach (4.50) auch in diesem Fall die Behauptung (4.77).

Wegen (4.70) und (4.72) gilt

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_l] \cap T} = \max\{\nu; \underline{t}_\nu \leq x_l\} \leq a_{l-1}^* \leq m_i^* + \dots m_{l-1}^*.$$

Wir zeigen nun (4.79). Nach (4.72) haben wir

$$m_i^* + \dots + m_{l-1}^* = a_\nu^* - (m_l + \dots + m_\nu) \quad (4.83)$$

für ein $l-1 \leq \nu \leq j-1$, und wir betrachten zunächst den Fall $\nu = l-1$.

Falls $a_{l-1}^* > 1$ gilt, folgt nach (4.70), daß $\underline{t}_{a_{l-1}^*} \leq x_l$, also

$$A(f - s_f) |_{[x_l, x_j] \cap T} \leq \mu - a_{l-1}^* + 1,$$

und diese Abschätzung gilt auch im Fall $a_{l-1}^* = 1$. Wegen $r_l \geq 1$ erhalten wir aus (4.76) und (4.83) mit $\nu = l-1$

$$\begin{aligned} \mu - a_{l-1}^* + 1 &= (m_i^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j) - (m_i^* + \dots + m_{l-1}^*) + 1 \\ &\leq r_l + m_l^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j \\ &= \tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^*, \end{aligned}$$

was den Beweis von (4.79) im Fall $\nu = l-1$ beendet. Falls $\nu \geq l$ gilt, folgt aus (4.83)

$$m_i^* + \dots + m_{l-1}^* + m_l + \dots + m_\nu = a_\nu^*. \quad (4.84)$$

(4.72) ergibt

$$a_\nu^* \leq m_i^* + \dots + m_\nu^*,$$

d.h., wir erhalten aus (4.84) und (4.75)

$$m_l = m_l^*, \dots, m_\nu = m_\nu^* \quad (4.85)$$

und

$$m_i^* + \dots + m_\nu^* = a_\nu^*. \quad (4.86)$$

Falls $\nu = j-1$ gilt, folgt (4.79) sofort aus (4.54) und (4.85). Wir nehmen somit im Folgenden $l \leq \nu \leq j-2$ an. Falls

$$A(f - s_f) |_{[x_i, x_{\nu+1}] \cap T} = 0, \quad (4.87)$$

so folgt $a_\nu^* = 1$ und daher mit (4.86) und (4.76)

$$\begin{aligned}\mu &= m_i^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j = 1 + m_{\nu+1}^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j \\ &\leq r_l + m_{\nu+1}^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j.\end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus (4.86) und (4.87) offenbar $m_l^* = \dots = m_\nu^* = 0$, d.h.

$$\mu \leq r_l + m_l^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j = \tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^*,$$

also insgesamt

$$A(f - s_f) |_{[x_l, x_j] \cap T} \leq A(f - s_f) |_{[x_l, x_j] \cap T} = \mu \leq \tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^*.$$

Es bleibt der Fall $A(f - s_f) |_{[x_l, x_{\nu+1}] \cap T} > 0$. Dann gilt nach (4.70)

$$\underline{L}_{a_\nu^*} \leq x_{\nu+1}. \quad (4.88)$$

Setzen wir $\bar{\rho} := \min\{\rho; x_l \leq \bar{t}_\rho\}$, so folgt aus (4.55) und (4.88)

$$a_\nu^* - \bar{\rho} + 1 \leq n_l + m_{l+1} + \dots + m_\nu$$

und damit wegen (4.85)

$$a_\nu^* - \bar{\rho} + 1 \leq n_l^* + m_{l+1}^* + \dots + m_\nu^*. \quad (4.89)$$

Schließlich erhalten wir insgesamt aus (4.76), (4.86) und (4.89)

$$\begin{aligned}A(f - s_f) |_{[x_l, x_j] \cap T} &= \mu - \bar{\rho} + 1 = m_i^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j - \bar{\rho} + 1 \\ &= a_\nu^* - \bar{\rho} + 1 + m_{\nu+1}^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j \\ &\leq n_l^* + m_{l+1}^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j \\ &= \tilde{m}_l^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^*.\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis von (4.79).

Zum Beweis von (4.80) setzen wir

$$p^* := \min\{\nu; x_p \leq \bar{t}_\nu\}$$

und

$$q^* := \max\{\nu; \underline{L}_\nu \leq x_q\}.$$

Aus (4.78) und (4.79) folgen

$$q^* = A(f - s_f) |_{[x_i, x_q] \cap T} \leq m_i^* + \dots + m_{q-1}^*$$

und

$$\mu - p^* + 1 = A(f - s_f) |_{[x_p, x_j] \cap T} \leq \tilde{m}_p^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^*.$$

Wegen (4.76) schließen wir hieraus

$$\begin{aligned} A(f - s_f) |_{[x_p, x_q] \cap T} &= q^* - p^* + 1 \\ &\leq m_i^* + \dots + m_{q-1}^* + \tilde{m}_p^* + \dots + \tilde{m}_{j-1}^* - \mu \\ &= m_i^* + \dots + m_{q-1}^* + r_p + m_p^* + \dots + m_{j-1}^* - r_j - \mu \\ &= r_p + m_p^* + \dots + m_{q-1}^* \\ &= n_p^* + m_{p+1}^* + \dots + m_{q-1}^*. \end{aligned}$$

Damit ist (4.80) gezeigt und der Beweis von Fall 2 beendet.

Fall 3: $\mu = 0$.

In diesem Fall wählen wir einen beliebigen Punkt $\tilde{t} \in (x_i, x_j)$ und führen mit $\tilde{t}_1 := \tilde{t}$ und $\tilde{\mu} := 1$ das Verfahren aus Fall 2 durch. \diamond

Beweis von Satz 4.17: Sei $s_f \in \mathcal{S}$ eine fixierte beste Approximation von f . Wir haben zu zeigen:

Liegt $x \in [a, b]$ in keinem Eindeutigkeitsintervall bzgl. f , so existiert eine beste Approximation $s \in \mathcal{S}$ von f mit $s(x) \neq s_f(x)$. Wir zeigen dies nur in folgendem Fall (die beiden anderen Fälle zeigt man analog):

Es gelten $0 < i < j < k+1$, $x \in (x_i, x_j)$, $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ sind Eindeutigkeitsintervalle bzgl. f , und $[x_i, x_j]$ enthält kein Eindeutigkeitsintervall bzgl. f .

Nach Lemma 4.18 folgen (4.49) - (4.51), und Lemma 4.23 ergibt

$$A(f - s_f) |_{[x_p, x_q]} \leq \hat{n}_{p,q} \quad \text{für alle } i < p < q < j, \quad (4.90)$$

$$A(f - s_f) |_{(x_i, x_l)} \leq m_i + \dots + m_{l-1} \quad \text{für alle } i < l < j, \quad (4.91)$$

$$A(f - s_f) |_{[x_l, x_j]} \leq \tilde{m}_l + \dots + \tilde{m}_{j-1} \quad \text{für alle } i < l < j \quad (4.92)$$

und

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} \leq m_i + \dots + m_{j-1} - r_j. \quad (4.93)$$

Gilt

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1$$

oder

$$A(f - s_f)|_{[x_i, x_l]} = m_i + \dots + m_{l-1} + 1 \quad \text{für ein } i < l < j,$$

so ist $f - s_f$ nach Lemma 4.23 in x_i nicht flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} , und wir setzen $\tilde{T} := E(f - s_f) \setminus \{x_i\}$. Andernfalls sei $\tilde{T} := E(f - s_f)$. Gilt

$$A(f - s_f)|_{(x_i, x_j)} = m_i + \dots + m_{j-1} - r_j + 1$$

oder

$$A(f - s_f)|_{[x_l, x_j]} = \tilde{m}_l + \dots + \tilde{m}_{j-1} + 1 \quad \text{für ein } i < l < j,$$

so ist $f - s_f$ nach Lemma 4.23 in x_j nicht flach von links bzgl. \tilde{g}_{r_j+1} , und wir setzen $T := \tilde{T} \setminus \{x_j\}$. Sonst sei $T := \tilde{T}$. Wegen (4.90) - (4.93) erfüllt T die Voraussetzungen (4.52) - (4.55) aus Lemma 4.24, d.h., es existiert ein $s \in S_{0,i}^0 \cap S_{j,k+1}^0$ mit (4.56) - (4.58).

Wir behaupten nun, daß es ein $\alpha > 0$ gibt, so daß $s_f + \alpha s$ beste Approximation von f ist. (Wegen $s(x) \neq 0$ beendet dies den Beweis von Satz 4.17.)

Gilt $x_i \in E(f - s_f) \setminus T$, so ist $f - s_f$ in x_i nicht flach von rechts bzgl. g_{r_i+1} , also existieren $\alpha_1, \epsilon_1 > 0$ mit

$$|(f(t) - s_f(t)) - (f(x_i) - s_f(x_i))| \geq \alpha_1 |g_{r_i+1}(t; x_i)| \quad \text{für alle } x_i < t < x_i + \epsilon_1. \quad (4.94)$$

Nach Lemma 4.20 können wir ϵ_1 o.B.d.A. so klein wählen, daß $\epsilon_1 < x_{i+1} - x_i$ und

$$|g_{r_i+1}(t; x_i)| \geq |g_r(t; x_i)| \quad \text{für alle } r_i + 1 \leq r \leq n_i \text{ und } t \in (x_i, x_i + \epsilon_1). \quad (4.95)$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.24 ergibt sich im Fall $x_i \in E(f - s_f) \setminus T$ sofort, daß s zwischen x_i und dem kleinsten Element aus $(x_i, x_j) \cap T$ keine Nullstelle besitzt (denn mit der dortigen Notation gilt $t_1 < z_1$), also können wir ϵ_1 auch o.B.d.A. so wählen, daß

$$(f(x_i) - s_f(x_i))s(t) < 0 \quad \text{für alle } x_i < t < x_i + \epsilon_1. \quad (4.96)$$

Wegen $s \in \mathcal{S}_{0,i}^0$ und Lemma 4.19 haben wir eine Darstellung

$$s(t) = c_{r_i+1}g_{r_i+1}(t; x_i) + \dots + c_{n_i}g_{n_i}(t; x_i) \quad \text{für alle } x_i < t < x_i + \epsilon_1 < x_{i+1}.$$

Setzen wir nun $c := \max\{|c_{r_i+1}|, \dots, |c_{n_i}|\}$, so folgt hieraus mit (4.95)

$$|s(t)| \leq c(n_i - r_i)|g_{r_i+1}(t; x_i)| \quad \text{für alle } t \in (x_i, x_i + \epsilon_1),$$

also mit (4.94)

$$|(f(t) - s_f(t)) - (f(x_i) - s_f(x_i))| \geq \alpha_1 |g_{r_i+1}(t; x_i)| \geq \frac{\alpha_1}{c(n_i - r_i)} |s(t)|. \quad (4.97)$$

Analog erhält man im Fall $x_j \in E(f - s_f) \setminus T$ die Existenz von $\epsilon_2, \tilde{\alpha} > 0$ mit

$$|(f(t) - s_f(t)) - (f(x_j) - s_f(x_j))| \geq \tilde{\alpha} |s(t)| \quad (4.98)$$

und

$$(f(x_j) - s_f(x_j))s(t) < 0 \quad \text{für alle } x_j - \epsilon_2 < t < x_j. \quad (4.99)$$

Ist nun α so gewählt, daß $0 < \alpha \leq \min\{\frac{\alpha_1}{c(n_i - r_i)}, \tilde{\alpha}\}$, dann folgt im Fall $x_i \in E(f - s_f) \setminus T$ nach (4.96) und (4.97)

$$\begin{aligned} & |f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \\ &= |(f(t) - s_f(t)) - (f(x_i) - s_f(x_i)) - \alpha s(t) + (f(x_i) - s_f(x_i))| \\ &= |f(x_i) - s_f(x_i)| - \left(|(f(t) - s_f(t)) - (f(x_i) - s_f(x_i))| - \alpha |s(t)| \right) \\ &\leq |f(x_i) - s_f(x_i)| \\ &= \|f - s_f\| \end{aligned}$$

für alle $t \in (x_i, x_i + \epsilon_1)$ und im Fall $x_j \in E(f - s_f) \setminus T$ analog aus (4.98) und (4.99)

$$|f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \leq \|f - s_f\|$$

für alle $t \in (x_j - \epsilon_2, x_j)$. Wir wählen $\alpha > 0$ zusätzlich so, daß $\|\alpha s\| \leq \frac{1}{2}\|f - s_f\|$, und erhalten damit zusammen mit (4.56) und (4.57) eine offene Umgebung V von $E(f - s_f)$ mit

$$|f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \leq \|f - s_f\| \quad \text{für alle } t \in V.$$

Da $[a, b] \setminus V$ kompakt ist, existiert ein $K > 0$ mit

$$|f(t) - s_f(t)| \leq \|f - s_f\| - K \quad \text{für alle } t \in [a, b] \setminus V,$$

und wählen wir schließlich $\alpha > 0$ so, daß auch noch $\|\alpha s\| \leq K$ gilt, dann folgt

$$|f(t) - (s_f(t) + \alpha s(t))| \leq |f(t) - s_f(t)| + \alpha |s(t)| \leq \|f - s_f\|$$

für alle $t \in [a, b]$, d.h., $s_f + \alpha s$ ist in der Tat eine beste Approximation von f aus S . \diamond

Zum Abschluß geben wir ein Beispiel eines IP-Raumes, der nicht Satz 4.17 genügt.

Beispiel 4.25 Seien S der Raum aus Beispiel 3.12 und f die Funktion zu Beginn dieses Beispiels (d.h. vor der "Abänderung"). Ist M_f die Menge, auf der alle besten Approximationen von f aus S übereinstimmen, so folgt nach dem dort Gezeigten $M_f = [-1, 0] \cup \{\pi\}$.

Literaturverzeichnis

- [1] Bartelt, M.W. und McLaughlin, H.W. : *Characterizations of strong unicity in approximation theory*, J. Approx. Theory 9 (1973), 255 - 266.
- [2] Berens, H. und Nürnberger, G. : *Nonuniqueness and selections in spline approximation*, Constr. Approx. 6 (1990), 181 - 193.
- [3] Jones, R.C. und Karlovitz, L.A. : *Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions*, J. Approx. Theory 3 (1970), 138 - 145.
- [4] Karlin, S. und Studden, W.J. : *Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics*, Interscience, New York, 1966.
- [5] Nürnberger, G. : *A local version of Haar's theorem in approximation theory*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 5 (1982), 21 - 46.
- [6] Nürnberger, G. : *Approximation by spline functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [7] Nürnberger, G., Schumaker, L.L., Sommer, M. und Strauß, H. : *Interpolation by generalized splines*, Numer. Math. 42 (1983), 195 - 212.

- [8] Nürnberger, G., Schumaker, L.L., Sommer, M. und Strauß, H. : *Generalized Chebyshevian splines*, SIAM J. Math. Anal. 15 (1984), 790 - 804.
- [9] Nürnberger, G., Schumaker, L.L., Sommer, M. und Strauß, H. : *Approximation by generalized splines*, J. Math. Anal. Appl. 108 (1985), 466 - 494.
- [10] Nürnberger, G. und Singer, I. : *Uniqueness and strong uniqueness of best approximations by spline subspaces and other spaces*, J. Math. Anal. Appl. 90 (1982), 171 - 184.
- [11] Nürnberger, G. und Sommer, M. : *Alternation for best spline approximations*, Numer. Math. 41 (1983), 207 - 221.
- [12] Schumaker, L.L. : *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1981.
- [13] Wagner, M. : *Strikte Approximation und stetige Selektionen der metrischen Projektion in schwach tschebyscheffschen Räumen*, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1986.
- [14] Wulbert, D.E. : *Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds*, Amer. J. Math. 18 (1971), 350 - 366.
- [15] Zielke, R. : *On transforming a Tchebyshev-system into a Markov-system*, J. Approx. Theory 9 (1973), 357 - 366.